Annales des Concours

PC
Mathématiques · Informatique
2019

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian Metzger
docteur en mathématiques
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Benjamin Monmege
enseignant-chercheur à l'université
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

William Aufort
professeur en CPGE

Jean-Paul Bonnet
professeur en CPGE

Philippe Bouafia
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Alban Levy
ENS Paris-Saclay

Thierry Limoges
professeur en CPGE

Rémi Pellerin
ENS Lyon

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Hugues Zuber
professeur en CPGE

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2019

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités
Centrale MP Maths 1		•	••	•••	•	•					•	•		•
Centrale MP Maths 2							••	••	••		••••	•	•	•••
Centrale PC Maths 1	•	••	•••	•••	•				•••		••	•	•	•••
Centrale PC Maths 2	•	••	•				••	•••	•	••	••			•••
Centrale PSI Maths 1		••	••	••		•	••	•	•	••		•	•	••••
Centrale PSI Maths 2		••	•••	•			•		•	••	•••	•	•	•••
Mines MP Maths 1			•	•	•		•	•	•	•		••		••••
Mines MP Maths 2		••	••	•	••	••	••	•			••	•	•	•
Mines PC Maths 1		•	••	•			•••	•	••	•••		•		•••••
Mines PC Maths 2		•	•				••	•	•	••	•••	••	•	•
Mines PSI Maths 1			••	•			••	•	••	•••		•		•••••
Mines PSI Maths 2		•	•••	•						••	••			•
X/ENS MP Maths A	•	•••	••••	•••	•	••	•		•	•				
X/ENS MP Maths B		•			•	•	•	••		••••	••••	•	•	•
X/ENS PC Maths		•	•••	•••	•	•				•••	•		•	•••
X/ENS PSI Maths		•••	•••	•	••	•				••		•		

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2019 **PCMA002**

CONCOURS
COMMUN
INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Q8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -\,kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k.

Q11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

Q14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

CCINP Maths PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hugues Zuber (professeur en CPGE) ; il a été relu par Théo Lenoir (ENS Ulm) et Gilbert Monna (professeur honoraire de mathématiques en CPGE).

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants.

- Le premier exercice décrit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ construit à l'aide d'une intégrale sur $[\,0\,;+\infty\,[$, avant de proposer une famille de polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire, vus comme vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'exercice se conclut par quelques conséquences sur le calcul d'intégrales liées à ces polynômes.
- Le deuxième exercice propose de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. En première partie, on détermine les solutions de l'équation homogène qui sont développables en série entière. En deuxième partie, on résout l'équation sur deux sous-intervalles de l'intervalle d'étude pour enfin, en troisième partie, étudier les raccords entre les solutions trouvées et achever la résolution de l'équation.
- Le troisième exercice permet d'étudier la marche aléatoire d'un pion qui se déplace sur trois positions possibles. On évalue le nombre (aléatoire) de passages en un point donné, puis le temps d'attente avant d'atteindre l'une des positions. Cet exercice met en jeu la capacité à travailler avec des évènements et le calcul ensembliste, la manipulation des variables aléatoires discrètes, et l'usage des formules des probabilités totales et des probabilités composées.

Le sujet est dans son ensemble très classique : les questions posées restent, dans chaque thématique, proches de ce qui a été vu en cours ou en travaux dirigés, et constituent donc un bon outil de révision. Seule la question 27 de l'exercice 2 demande une plus grande prise d'initiative, avec l'étude du raccord entre les solutions trouvées précédemment, mais là encore, les étapes à suivre sont décrites dans le cours.

Indications

Exercice 1

1 La fonction exp domine toute fonction polynomiale en $+\infty$. Utiliser une comparaison avec une fonction de la forme $t \mapsto 1/t^a$, puis une intégrale de référence associée.

4 Écrire $(\mathrm{X}^k \mid 1)$ sous forme d'une intégrale pour voir le lien avec la question 3. Raisonner par récurrence.

7 La matrice de la question 6 est triangulaire, on connaît donc ses valeurs propres.

8 Avec la question 7, que vaut $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Sp}(\alpha))$? Que vaut $\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$?

9 L'espace $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]})$ étant une droite, deux vecteurs quelconques de cette droite sont forcément colinéaires. Quand on multiplie un polynôme non nul par un scalaire, on multiplie son coefficient dominant par ce même scalaire.

10 Noter d le degré de P_k et chercher son lien avec le coefficient dominant de $\alpha(\mathrm{P}_k)$. Déterminer le coefficient dominant de $-k\mathrm{P}_k$, et se rappeler que $\alpha(\mathrm{P}_k) = -k\mathrm{P}_k$.

12 Effectuer une intégration par parties ; pour cela, il reste à trouver les deux fonctions auxquelles on l'applique : l'une des deux est la fonction polynomiale Q.

14 Pour démarrer, utiliser la question 13 avec P_k et P_ℓ, où $k \neq \ell$.

15 Le système linéaire proposé donne $(*)$ dans le cas particulier des monômes. Pour la réciproque, se rappeler que tout polynôme est combinaison linéaire de monômes.

16 La matrice du système linéaire est une matrice de Vandermonde.

17 Trouver un polynôme qui admet $x_1, \ldots, x_n$ comme racines, pour lequel l'intégrale est non nulle (par exemple en choisissant un polynôme à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

Exercice 2

18 Le travail consiste à rassembler toutes les sommes trouvées à la question 17, via des changements d'indices, pour obtenir une seule série entière.

24 Calculer, pour $x \in \mathrm{I}$, $xz''(x) + z'(x)$ en fonction de $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$.

25 L'équation (E_1) peut être vue comme une équation sur z' : elle devient alors une équation linéaire d'ordre 1 sur z', que l'on sait résoudre.

26 Déduire z de z', puis y de z. Penser à la réciproque.

27 Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors y est solution sur $]\,0\,;1\,[$ et $]\,1\,;+\infty\,[$. Appliquer la question 26 sur ces intervalles, puis étudier le raccord en 1.

Exercice 3

29 Utiliser la formule des probabilités totales avec $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n)$, un système complet d'évènements, sur chacun des évènements demandés : A_{n+1}, puis B_{n+1} et C_{n+1}.

32 Trouver le lien avec le titre de la partie II.

34 Comme $a_n = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)$, on peut utiliser la linéarité de l'espérance.

35 Remarquer que $[\mathrm{T_B} = 1] = \mathrm{B}_1$. Pour $\mathrm{P}\,(\mathrm{T_B} = 2)$, on peut utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1)$.

37 Utiliser la question 36 sur $\overline{\mathrm{B}}_2$ et $\overline{\mathrm{B}}_1$, puis développer $\overline{\mathrm{B}}_2 \cap \overline{\mathrm{B}}_1$ afin d'avancer dans le calcul de probabilité. Faire un travail similaire avec $\mathrm{B}_3 \cap \overline{\mathrm{B}}_2 \cap \overline{\mathrm{B}}_1$ et comparer les résultats.

38 Remarquer que $[\mathrm{T_B} = k] = \overline{\mathrm{B}}_1 \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{B}}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k$, puis utiliser la formule des probabilités composées.

39 Le plus rapide est de s'apercevoir que $\mathrm{T_B}$ suit une loi usuelle.

Exercice 1. Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

$\boxed{1}$ Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. L'application $t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$, donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

n'est impropre qu'en $+\infty$. L'application $t \mapsto t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$ est polynomiale, donc négligeable devant l'exponentielle en $+\infty$. On en déduit que $\left|t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\right| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire

$$|\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est positive sur $[\,1\,; +\infty\,[$ et que l'intégrale de référence

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge, on peut affirmer par comparaison des fonctions positives que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente, donc convergente. La fonction intégrée étant continue sur $[\,0\,; 1\,]$, on conclut que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Rappelons que, pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale de référence

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si $a > 1$. La borne 1 de l'intervalle d'intégration peut être remplacée par n'importe quel réel strictement positif (mais surtout pas par 0).

La question 1 peut aussi être traitée en commençant par étudier le cas des monômes, autrement dit, en montrant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. Il reste ensuite à préciser que tout polynôme est combinaison linéaire de monômes. Plus généralement, on peut montrer que l'application

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La question 4 montre que cette fonction Γ permet de prolonger la fonction « factorielle » qui, elle, n'est définie que sur $\mathbb{N}$.

2 D'après la question 1, pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])^2$, $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q})$ est un nombre réel correctement défini ; l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est bien une application de $(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])^2$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{Q}$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2 \mid \mathrm{Q}) &= \int_0^{+\infty} (\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2)(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (\mathrm{P}_1(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t} + \lambda \mathrm{P}_2(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{P}_1(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{P}_2(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ (\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2 \mid \mathrm{Q}) &= (\mathrm{P}_1 \mid \mathrm{Q}) + \lambda (\mathrm{P}_2 \mid \mathrm{Q})\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est linéaire à gauche.

Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])^2$. On a

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Q}(t)\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (\mathrm{Q} \mid \mathrm{P})$$

Ainsi, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est symétrique. Par conséquent, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est bilinéaire symétrique.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Comme l'application $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ (notamment car exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$), on a, par positivité de l'intégrale,

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Supposons maintenant que $(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}) = 0$. Alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$$

L'application $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, donc le fait que l'intégrale soit nulle entraîne que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{P}(t) = 0 \quad (\text{car } \mathrm{e}^{-t} \neq 0)$$

Le polynôme P admet donc une infinité de racines ; on en déduit que $\mathrm{P} = 0$. On vient de montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est définie positive. Finalement,

$$\boxed{\text{L'application } (\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire.}}$$

3 Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Réalisons une intégration par parties avec les deux applications $u : t \mapsto t^k$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Par croissances comparées, pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$,

$$[u(t)v(t)]_0^{\mathrm{A}} = -\mathrm{A}^k\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 0$$

Ainsi le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ est bien défini. Avec ceci et le résultat de la question 1, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^k\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} kt^{k-1}(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$$

On a vu que le crochet est nul, il reste

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Centrale Maths 1 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Quentin Guilmant (ENS Lyon) et William Aufort (professeur en CPGE).

De nombreuses propriétés des matrices sont conservées à la fois par combinaison linéaire et par produit matriciel : le fait d'être diagonale, d'être triangulaire supérieure, d'être triangulaire par bloc (avec une configuration des blocs fixée), etc. Un ensemble constitué des matrices partageant une telle propriété porte le nom de *sous-algèbre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. Il existe une notion très proche de sous-algèbre d'endomorphismes, que ce problème propose d'étudier.

- La première partie est essentielle pour se familiariser avec la notion nouvelle de sous-algèbre. De nombreux exemples y sont abordés, notamment ceux cités plus haut, et seront réutilisés ultérieurement.
- La deuxième partie s'intéresse au cas particulier des matrices circulantes. Les premières questions montrent que cette sous-algèbre a des points communs avec la sous-algèbre des matrices diagonales : même dimension, commutativité. La fin de cette partie montre plus précisément que ces deux sous-algèbres sont équivalentes, à un changement de base près. On retrouvera dans la partie IV ce thème de la réduction des sous-algèbres, qui permet en quelque sorte de se ramener aux exemples fondamentaux de sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- La troisième partie pose la question de la dimension maximale d'une sous-algèbre strictement incluse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De manière assez remarquable, étant donné le problème considéré, la résolution passera par l'introduction d'un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ce qui explique pourquoi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans cette partie).
- La quatrième partie montre que si une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est constituée de matrices nilpotentes, alors elles sont trigonalisables dans une même base.
- Enfin, la dernière partie, d'un niveau sensiblement plus élevé, se propose de montrer un résultat admis lors de la partie précédente.

Comme on le voit, ce problème est centré sur le programme d'algèbre de PC, notamment sur la réduction des matrices et des endomorphismes. Il aborde de nombreux points qui, bien que ne figurant pas explicitement au programme, sont néanmoins classiques (matrices nilpotentes et circulantes). Les deux premières parties sont d'un niveau moyen et permettent de tester ces connaissances. Mentionnons également qu'il est indispensable de maîtriser les bases de l'algèbre linéaire de première année.

Indications

Partie I

3 Montrer que $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit matriciel en adaptant le contre-exemple obtenu à la question précédente. En ce qui concerne $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, chercher en premier lieu un contre-exemple simple dans le cas $n = 3$.

8 Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

9 Noter que les matrices suivantes sont diagonalisables avec une même matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II

15 Remarquer que $\mathrm{J}^k \in \mathscr{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

20 L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel complexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

21 Choisir pour P une matrice de passage permettant la diagonalisation de J.

22 Considérer une base de vecteurs propres de J.

Partie III

25 Tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est égal à son double orthogonal.

26 Utiliser (enfin) l'hypothèse de stabilité par produit : si $\mathrm{N} \in \mathscr{A}$, alors $\mathrm{NM} \in \mathscr{A}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{A}$.

29 Traiter rapidement la question dans le cas $r \geqslant n$ puis utiliser les résultats de la partie I.B et les questions 27 et 28 pour le cas $r < n$.

Partie IV

32 S'inspirer de la question 5 pour la construction de la base $\mathscr{B}$.

Partie V

36 Montrer que $\{u(x) \mid u \in \mathscr{A}\}$ est un sous-espace vectoriel stable par les éléments de $\mathscr{A}$, et dans le cas malencontreux où il est réduit à $\{0\}$, construire un autre sous-espace stable contredisant l'irréductibilité de $\mathscr{A}$.

37 Bien entendu, suivre l'indication présente dans le sujet en posant notamment l'endomorphisme $z \mapsto u(v(z))$ de l'espace $\mathrm{Im}\, v$. Justifier proprement que son spectre est non vide, et choisir pour λ l'une de ses valeurs propres. Enfin, pour montrer que l'endomorphisme $v \circ u \circ v - \lambda\,\mathrm{id}$ est non nul, il suffit d'exhiber un vecteur en lequel il ne s'annule pas.

38 Considérer le rang minimal d'un élément non nul de $\mathscr{A}$.

39 Construire les u_i par composition à gauche de u_0 avec un élément de $\mathscr{A}$ bien choisi.

40 Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les endomorphismes de rang 1. Dans ce but, on pourra étudier la surjectivité de l'application linéaire de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_i))$ qui envoie u sur $u_i \circ u$.

I. Exemple de sous-algèbres

1 On sait que $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons maintenant que si $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{N} = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont deux matrices dans $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{MN} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$, ce qui revient à établir que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i > j$, le coefficient $(\mathrm{MN})_{i,j}$ du produit MN est nul. On calcule donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{MN})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j} && \text{(produit matriciel)}\\
&= \sum_{k=i}^{n} m_{i,k}n_{k,j} && \text{(M est triangulaire)}\\
&= \sum_{k=i}^{n} m_{i,k}\times 0 && (j < i \leqslant k \text{ donc } n_{k,j} = 0)\\
(\mathrm{MN})_{i,j} &= 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De manière similaire, on montre qu'il en est de même pour $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2

> Très souvent, les matrices carrées d'ordre 2 constituent un terrain de jeu privilégié pour la découverte d'exemples et de contre-exemples en algèbre linéaire. Ce sont des objets suffisamment « légers » pour se prêter aux calculs. Notamment, il ne faut pas rechigner à introduire et manipuler les coefficients d'une matrice 2×2 lorsque d'autres approches échouent.

Rappelons que $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrons maintenant que $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ est stable par produit. Soient M et N deux matrices quelconques dans $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$. Il existe des scalaires a, b, c et $d \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} c & d\\ d & c\end{pmatrix}$$

Un calcul rapide donne que

$$\mathrm{MN} = \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\\ d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc\\ ad+bc & ac+bd\end{pmatrix}$$

On constate que cette matrice est bien symétrique, comme souhaité.

Traitons maintenant le cas de l'ensemble $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$. Celui-ci n'est malheureusement pas stable par produit, ce que montre le contre-exemple suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{A}_2(\mathbb{K})}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{A}_2(\mathbb{K})} = -\mathrm{I}_2 \notin \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{S}_2(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{A}_2(\mathbb{K}) \text{ n'en est pas une.}}$$

3 Soit $n \geqslant 3$. L'ensemble $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit. En effet, en adaptant le contre-exemple de la question précédente, on trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0_{n-2}\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0_{n-2}\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_2 & \\ & 0_{n-2}\end{pmatrix} \notin \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$$

où 0_{n-2} désigne la matrice carrée nulle d'ordre $n-2$.

Qu'en est-il de l'ensemble $S_n(\mathbb{K})$? Seule la stabilité par produit pose problème. Si cette propriété était vérifiée, alors pour toutes matrices M et N dans $S_n(\mathbb{K})$, on aurait $MN \in S_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $(MN)^\top = MN$. D'un autre côté, $(MN)^\top = N^\top M^\top = NM$. Il faudrait ainsi que toutes les matrices symétriques commutent, ce qui semble faux pour $n \geqslant 3$. On s'oriente donc vers un résultat négatif, ce qui nécessite d'exhiber un contre-exemple.

Commençons par le cas $n = 3$. On sait que $S_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension 6 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, dont une base est formée des trois matrices diagonales élémentaires $\operatorname{diag}(1,0,0)$, $\operatorname{diag}(0,1,0)$ et $\operatorname{diag}(0,0,1)$ ainsi que des trois matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par des arguments de linéarité, on se convainc qu'un contre-exemple, s'il existe, peut être trouvé parmi les matrices de la précédente base. En effet, il se trouve que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in S_3(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in S_3(\mathbb{K})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\notin S_3(\mathbb{K})}$$

Il ne reste plus qu'à adapter ce contre-exemple au cas général $n \geqslant 3$.

L'ensemble $S_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, comme le montre le contre-exemple

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0_{n-3} \end{array}\right)}_{\in S_n(\mathbb{K})} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline & & & 0_{n-3} \end{array}\right)}_{\in S_n(\mathbb{K})} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0_{n-3} \end{array}\right)}_{\notin S_n(\mathbb{K})}$$

$$\boxed{\text{Les ensembles } A_n(\mathbb{K}) \text{ et } S_n(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ lorsque } n \geqslant 3.}$$

4 Il faut montrer les deux points suivants :

- L'ensemble $\mathscr{A}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$: tout d'abord, l'application nulle appartient clairement à $\mathscr{A}_F$. Soient maintenant $u, v \in \mathscr{A}_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout vecteur $x \in F$, on observe que $(\lambda u + v)(x) = \lambda u(x) + v(x) \in F$ car $u(x)$ et $v(x)$ sont dans F, puisque $u, v \in \mathscr{A}_F$. Ainsi $(\lambda u + v)(F) \subset F$.

- Stabilité par composition : prenons u et v dans $\mathscr{A}_F$ et $x \in F$. Par définition de $\mathscr{A}_F$, on a $v(x) \in F$. Comme $u \in \mathscr{A}_F$, on a $u \circ v(x) = u(v(x)) \in F$. Le vecteur x étant quelconque, on a en réalité montré que $u \circ v(F) \subset F$, c'est-à-dire $u \circ v \in \mathscr{A}_F$.

Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{L}(E).}$$

Centrale Maths 2 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alban Levy (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Vincent Lerouvillois (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet en trois parties explore certaines propriétés de la fonction

$$f : x \longmapsto (\sin x + 1)/\cos x$$

et des coefficients de son développement en série entière.

- Dans la première partie, on étudie la forme des dérivées de f puis son développement en série entière. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral, et quelques raisonnements par récurrence.
- La deuxième partie introduit la fonction ζ de Riemann, dont on étudie la continuité et la limite en l'infini. Grâce aux intégrales à paramètre

  $$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \, \mathrm{d}t$$

  on obtient un développement en série entière de la fonction tangente qui fait intervenir cette fonction ζ.
- La dernière partie est plus originale : à coups de dénombrements, on étudie certaines permutations dites alternantes, les reliant finalement à la fonction f par des probabilités.

Ce sujet comporte quelques difficultés. Dans plusieurs questions, le résultat attendu n'est pas explicitement donné. Les dénombrements de la troisième partie sont assez délicats.

Indications

Partie I

1 Utiliser la règle de dérivation d'un quotient et l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour simplifier les calculs.

2 Construire la suite P_n par récurrence.

3 Démontrer la propriété par récurrence en utilisant l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n obtenue à la question précédente.

4 Développer $f^2(x) + 1$.

5 Appliquer la formule de Leibniz.

6 Utiliser la question 3 en remarquant qu'un entier naturel est positif par définition.

7 Utiliser le lemme d'Abel.

8 Calculer g^2 par produit de Cauchy.

9 Dériver $\mathrm{Arctan}\,(f)$ et $\mathrm{Arctan}\,(g)$.

10 Faire une preuve par l'absurde.

11 Prouver l'existence en donnant une décomposition explicite en fonction de $h(x)$ et $h(-x)$; l'unicité sera prouvée par l'absurde.

12 Décomposer la fonction f en somme de deux fonctions, l'une paire et l'autre impaire.

13 Faire le lien entre les coefficients de la série entière et les dérivées de la fonction.

15 Utiliser la formule de Leibniz puis évaluer en 0 en retirant les termes nuls.

Partie II

16 Montrer la convergence normale de la série de fonctions sur $[\,a\,;+\infty\,[$, $a > 1$.

17 Utiliser la monotonie de $t \mapsto 1/t^s$ pour faire une comparaison série intégrale.

18 Séparer la somme définissant ζ en la somme des termes pairs et celle des termes impairs.

19 Pour $x \in \mathbb{R}$, intégrer par parties la quantité $4x^2\mathrm{I}_n(x)$.

20 Calculer $\mathrm{I}_0(x)$ puis faire une preuve par récurrence.

21 Utiliser l'égalité $\sin(2\pi x) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)$ et la question précédente.

22 Utiliser une comparaison série/intégrale de $(2t-1)^{-s}$ pour $t \in [\,k-1\,;k\,[$.

23 Utiliser la question 22 puis majorer par une série géométrique.

24 Réutiliser la question 22.

25 Dériver $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$ en vérifiant bien les hypothèses de dérivation d'une intégrale à paramètre ; utiliser la question 21.

26 Développer ζ dans la somme donnée, grâce à la question 18, puis en faire ressortir S_n.

27 Étudier la fonction $t \longmapsto \sin(t) - t\cos(t)$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

28 Utiliser l'inégalité de la question 27 avant d'intégrer par parties.

29 Faire tendre n vers l'infini dans le résultat de la question 26 en montrant que certains éléments tendent vers 0.

30 Utiliser l'unicité du développement en série entière de tan à partir des questions 12 et 29.

31 Utiliser la formule de Stirling et la question 17.

Partie III

32 Dresser la liste de toutes les permutations et identifier les éléments alternants montants.

33 Utiliser l'application $\phi : \sigma \mapsto (i \mapsto n+1-\sigma(i))$ et vérifier notamment qu'il s'agit d'une bijection de Ω_n dans lui-même.

34 Noter $\mathrm{A} = \{a_1 < \cdots < a_k\}$ et remarquer qu'une liste d'éléments deux à deux distincts peut se noter $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)})$ avec σ injective.

35 La question est difficile. Vérifier à l'aide d'arguments combinatoires que le nombre de permutations alternantes de $[\![1\,; n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$ est égal à

$$\binom{n}{k} \times \beta_k \times \beta_{n-k}$$

36 Réaliser que les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ satisfont la même relation de récurrence.

37 Utiliser le fait que le rayon de convergence de la série $\sum \alpha_n x^n/n!$ est strictement supérieur à 1.

38 Utiliser des arguments similaires à ceux de la question 35 pour compter les permutations de $[\![1\,; n]\!]$ telles que $\sigma(1), \ldots, \sigma(i)$ est alternante montante.

39 Remarquer que pour tout k, $\mathrm{P}(\mathrm{M}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > k-1) - \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > k)$ et injecter cette égalité dans la somme définissant l'espérance.

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

1 En tant que quotient de fonctions indéfiniment dérivables et non nulles sur I, la fonction f l'est aussi. Calculons ses dérivées successives par les règles usuelles de dérivation. Soit $x \in \mathrm{I}$, alors

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

en utilisant l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Il vient de même

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x - (\sin x + 1)(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x}$$

et $f^{(3)}(x) = \dfrac{(2\sin x \cos x + 2\cos x)\cos^3 x - (-3\cos^2 x\ \sin x)(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{\cos^6 x}$

Ainsi,
$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) &= \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} \\ f''(x) &= \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}{\cos^4 x} \end{aligned}}$$

2 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

est vraie pour tout n entier.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisqu'on a montré à la question 1 que pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\mathrm{P}_0(\sin x)}{(\cos x)^1}$$

  avec $\mathrm{P}_0 = 1 + \mathrm{X} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: si l'on suppose que

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

  alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos x\, \mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^{n+1} + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)(\cos x)^n \sin x}{(\cos x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^2 + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (1 - \sin^2 x) + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \end{aligned}$$

  car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On obtient donc $\mathscr{P}(n+1)$ en posant

$$\boxed{\mathrm{P}_{n+1} = (1 - \mathrm{X}^2) \cdot \mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{P}_n \cdot \mathrm{X}}$$

Centrale Informatique MP-PC-PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet s'intéresse à l'élasticité de l'ADN, plus particulièrement à la relation qui existe entre une force exercée sur un brin d'ADN et l'allongement de ce brin. Cette relation permettrait d'avancer dans la compréhension de processus biologiques, comme la réplication de l'ADN.

- La première partie comporte seulement trois questions d'implémentation de fonctions utilitaires, dont deux sont explicitement au programme d'informatique pour tous.
- La deuxième partie introduit le protocole expérimental permettant d'évaluer l'intensité de la force de traction exercée artificiellement sur un brin d'ADN auquel on a accroché une bille aimantée, ainsi que l'allongement du brin. Cette partie est principalement consacrée à des algorithmes de traitement d'images (représentées par des tableaux Numpy à deux dimensions).
- Une fois les mesures effectuées, on souhaite maintenant les faire correspondre à un modèle mathématique. La troisième partie étudie le « modèle du ver », qui donne la relation entre force de traction et allongement sous la forme d'une formule mathématique faisant intervenir des caractéristiques du brin. Cette partie propose de déterminer ces caractéristiques à partir des observations effectuées et d'une fonction prédéfinie en Python, puis explore les bases de l'algorithme de minimisation sous-jacent pour des problèmes à une ou deux dimensions.
- Enfin, la dernière partie propose un second modèle, probabiliste cette fois, permettant de simuler l'allongement d'un brin d'ADN soumis à une force donnée en paramètre.

Les parties 2, 3 et 4 sont indépendantes, et le sujet couvre une grande proportion du programme d'informatique pour tous (listes et tableaux Numpy, représentation des nombres, ingénierie numérique et récursivité). La plupart des questions sont abordables dès la première année. Enfin, dans chaque partie la dernière question est plus délicate, sans être vraiment difficile.

Indications

Partie I

2 Attention à ne pas utiliser la fonction `moyenne` n fois.

3 L'utilisation d'une fonction récursive semble adaptée.

Partie II

5 Pour arrondir à l'entier le plus proche, on pourra utiliser la fonction `round`.

7 Commencer par calculer le barycentre des positions de la liste, puis dans un deuxième temps la moyenne des déplacements quadratiques. Ne pas oublier d'utiliser correctement le paramètre `t`.

8 L'énoncé suggère d'utiliser des fonctions intermédiaires. On peut commencer par déterminer le rayon extérieur du plus grand anneau en fonction de la position du centre de la bille. Puis pour chaque pixel de l'image, on cherchera à exprimer le numéro de l'anneau dans lequel il se trouve.

Partie III

11 Dans la fonction `curve_fit`, la fonction `f` ne doit pas avoir la température `T` comme argument. Il faut également extraire `xdata` et `ydata` à partir du tableau à deux colonnes `Fz`. Attention à l'ordre.

12 Le nombre de chiffres significatifs dépend uniquement de la mantisse.

13 Pour $h = 10^{-16}$, utiliser la question 12 pour savoir comment seront représentés les nombres $1 + h$ et $1 - h$ dans ce codage.

15 Le premier argument de `derive` est une fonction, il faut donc être précautionneux si on veut utiliser `derive` deux fois de suite.

16 Il faut appliquer la méthode de Newton à ϕ' et non à ϕ.

17 Le système se déduira directement des équations des plans tangents considérés.

18 Deux stratégies sont possibles : utiliser les applications partielles, ou effectuer le calcul à la main, avec des formules semblables à celle utilisée à la question 14.

19 On pourra séparer de la fonction `min_local_2D` le calcul de la matrice $\mathrm{J}(x, y)$. Pour ce calcul, commencer par définir les fonctions g_x et g_y, puis réutiliser la fonction `grad`.

Partie IV

20 Générer des nombres aléatoires dans $[\,0\,;1\,[$, puis utiliser une transformation affine pour obtenir des angles dans l'intervalle $[\,-\pi\,;\pi\,[$.

22 La question demande de créer une nouvelle conformation. Attention également aux indices manipulés.

24 Utiliser une liste comme une file pour conserver uniquement les 500 derniers allongements. On pourra commencer par initialiser les 500 premiers allongements, puis utiliser une boucle `while` pour la phase de convergence.

I. Fonctions utilitaires

1 Il suffit d'additionner tous les éléments de la séquence à l'aide d'une boucle, sans oublier de diviser par la longueur de la séquence pour obtenir la moyenne.

```
def moyenne(X):
    somme = 0
    for i in range(len(X)):
        somme += X[i]
    return somme/len(X)
```

> On peut aussi parcourir la séquence sans utiliser d'indice avec un itérateur :
>
> ```
> def moyenne(X):
>     somme = 0
>     for x in X:
>         somme += x
>     return somme/len(X)
> ```

2 On utilise la formule de König-Huygens rappelée dans l'énoncé : on calcule d'abord la moyenne des carrés comme précédemment, à laquelle on soustrait le carré de la moyenne.

```
def variance(X):
    s = 0
    for x in X:
        s += x**2
    return s/len(X) - moyenne(X)**2
```

> Une autre stratégie consiste à utiliser la définition de la variance. Attention dans ce cas à utiliser la fonction `moyenne` une seule fois avant la boucle, afin d'éviter une complexité en $O(n^2)$.
>
> ```
> def variance(X):
>     s = 0
>     m = moyenne(X)
>     for x in X:
>         s += (x - m)**2
>     return s/len(X)
> ```

3 Pour pouvoir explorer l'ensemble des éléments de la séquence imbriquée, le plus simple est d'écrire une fonction `somme` récursive. Si l'argument `M` de la fonction `somme` est un composant élémentaire, c'est-à-dire un nombre réel (que l'on peut détecter avec `isinstance(M, numbers.Real)`), on peut le renvoyer directement. Dans le cas contraire, `M` est une séquence imbriquée : on calcule alors la somme des éléments qui la compose à l'aide d'une boucle et de la fonction `somme` appliquée à chacun de ces éléments.

> L'énoncé ne suppose pas que le module `numbers` a été importé, ce qui est pourtant nécessaire pour pouvoir utiliser `numbers.Real`.

```
def somme(M):
    if isinstance(M, numbers.Real):
        return M
    else:
        s = 0
        for x in M:
            s += somme(x)
        return s
```

Dans le code précédent, le `else` est facultatif, du fait de la présence du `return` dans le cas où `M` est un nombre réel. On pourrait donc l'enlever, ainsi que le niveau d'indentation induit dans tout le bloc suivant, ce qui peut rendre le code plus agréable à lire.

II. Mesures expérimentales

4 On commence par initialiser le tableau demandé à l'aide de la fonction `np.zeros`. Puis on parcourt le tableau initial à l'aide d'une double boucle pour mettre à jour les pixels dont la valeur est strictement inférieure au seuil, les autres étant déjà associés à la valeur 0 dans l'image seuillée.

```
def seuillage(A, seuil):
    S = np.zeros(A.shape, int)
    for i in range(A.shape[0]):
        for j in range(A.shape[1]):
            if A[i, j] < seuil:
                S[i, j] = 1
    return S
```

Pour récupérer les dimensions du tableau en argument, on a utilisé ici l'attribut `A.shape`, qui était donné en annexe. Dans ce type d'épreuve, il est primordial de bien lire l'annexe avant de commencer le sujet, pour identifier notamment des fonctions pouvant être utiles.

Une autre possibilité pour extraire les dimensions consiste à utiliser la fonction `len`. En effet, `len(A)` renvoie le nombre de lignes du tableau `A` (identique donc à `A.shape[0]`), et `len(A[0])` renvoie le nombre de colonnes de `A` (identique à `A.shape[1]`).

Enfin, une dernière solution consiste à utiliser le fait que la plupart des opérations usuelles (arithmétiques et logiques) sur les tableaux Numpy agissent élément par élément. On pourrait par exemple écrire :

```
def seuillage(A, seuil):
    return 1 * (A < seuil)
```

En effet, `A < seuil` renvoie un tableau Numpy de mêmes dimensions que `A`, contenant les booléens résultats des comparaisons des éléments de `A` avec `seuil`. Puis, le produit `1 * (A < seuil)` permet de renvoyer un tableau dans lequel chacun des booléens précédents a été multiplié par `1`, ce qui a pour effet de transformer les `True` en 1 et les `False` en 0. La fonction répond donc bien à la question posée.

Mines Maths 1 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et par Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet propose d'établir des équivalents simples pour une famille d'applications développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Il est composé de 4 parties largement indépendantes.

- La première partie est une mise en jambe qui a pour but d'une part d'établir un résultat de convergence utile pour la suite, et d'autre part d'écarter de l'étude qui suit quelques cas triviaux.
- La deuxième partie propose la preuve d'un cas particulier qui utilise la théorie des probabilités. Cela dit, il s'agit d'une utilisation purement analytique de cette théorie qui exclut tout argument de type combinatoire.
- La troisième partie est quant à elle plus délicate. Elle établit le résultat dans le cas général et constitue un très bon entraînement à la manipulation d'équivalents et de « petits o ».
- La quatrième partie propose une application simple à l'étude d'une équation différentielle. La question 18 est à savoir faire absolument ! Elle peut d'ailleurs être traitée indépendamment du reste du problème.

Dans l'ensemble, ce sujet est d'une difficulté raisonnable car tous les résultats utiles pour continuer à avancer sont donnés. Il y a néanmoins quelques questions délicates dans les parties II et III. De plus, le sujet est long et sa résolution complète dans les 3 heures imparties est un véritable défi ! Travailler ce sujet est une bonne idée pour réviser les chapitres relatifs aux séries entières, aux probabilités dans leur aspect purement analytique ainsi que le calcul de limites et la manipulation d'équivalents et de « petits o ».

Indications

1 Utiliser le critère de d'Alembert.

2 Penser aux développements en séries entières usuels.

4 Remarquer que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_x) = x$.

5 Commencer par établir, en utilisant l'inégalité de Markov, que

$$\forall x > 1 \qquad \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left[\,(\mathrm{Z}_x)^r \geqslant \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r\right] \leqslant \mathbb{E}\left(\,(\mathrm{Z}_x)^r\,\right)$$

puis que $\quad \forall x > 1 \qquad \mathbb{P}\left[\,(\mathrm{Z}_x)^r \geqslant \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)\right] = \mathbb{P}\left[\mathrm{Z}_x \geqslant 1 - x^{\frac{-1}{3}}\right]$

6 Simplifier $\dfrac{1}{n\,!}\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(n-k)$; les premiers termes de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^n \prod\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(n-k)$ sont nuls.

7 Établir la relation suivante sur les polynômes

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \quad \exists!(a_1, \ldots, a_\mathrm{N}) \in \mathbb{R}^\mathrm{N} \qquad \mathrm{X}^\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k\,\mathrm{H}_k$$

où les polynômes H_k sont définis comme dans l'indication. Que vaut $\deg \mathrm{H}_k$?

8 Introduire l'application $f_s : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^s - s(t-1) + 1 \end{cases}$ et étudier ses variations.

Ensuite, considérer l'égalité obtenue et l'appliquer à $t = \mathrm{Z}_x(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$.

9 Établir grâce aux résultats des questions 5, 7 et 8 que pour $x > 1$,

$$\left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left[\mathrm{Z}_x \geqslant 1 - x^{\frac{-1}{3}}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[(\mathrm{Z}_x)^r\right] \leqslant (1-s)\,\mathbb{E}\left[\,(\mathrm{Z}_x)^\mathrm{N}\,\right] + s\,\mathbb{E}\left[\,(\mathrm{Z}_x)^{\mathrm{N}-1}\,\right]$$

10 Prouver que

$$\forall x > 0 \qquad u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{-x^n(n+1)^{r-1}}{n\,!}\,\varphi_x(n+1)$$

11 On pourra utiliser la question 10 pour calculer les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_x(x + r + \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi_x(x + r - \varepsilon)$$

12 Remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\lfloor x \rfloor + k)! \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor! \times \lfloor x \rfloor^k$$

13 Utiliser la question 10.

14 Se servir du résultat établi à la question 13.

16 Pour établir la première égalité sur $\mathrm{S}_{r,1}(zx)$, on pourra raisonner avec la somme partielle et montrer que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n)\,u_n(x) + \mathrm{D}_1\,u_0(x) - \mathrm{D}_\mathrm{N}\,u_\mathrm{N}(x)$$

avant de conclure avec la question 15.

Pour majorer $|\mathrm{S}_{r,1}(zx)|$, utiliser la question 10 et notamment, le fait que $u_n(x)$ est croissante puis décroissante, et toujours positive. Utiliser la question 11 pour justifier que $\lfloor t_x \rfloor \geqslant 1$ pour x suffisamment grand. Conclure grâce à la question 14.

17 Permuter les deux sommes en le justifiant.

18 Raisonner par analyse-synthèse et établir que, nécessairement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \frac{n}{(n\,!)^2}$$

I. Généralités, cas particuliers

1 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Utilisons le critère de d'Alembert. Comme $(p\,n)^r\,/\,(p\,n)\,!$ ne s'annule pour aucune valeur de n, on peut écrire

$$\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))\,!} \times \frac{(p\,n)\,!}{(p\,n)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \times \frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!}$$

Or,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et
$$\frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!} = \frac{1}{(p\,n+1)\times\cdots\times(p\,n+p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{car } p \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r\,/\,(p\,n)!\,z^n \text{ est infini.}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, comme la série $\sum a_n\,z^n$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, il y a également convergence absolue de $\sum a_n\,z^{pn}$. Ainsi, la série $\sum a_n\,z^{pn}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc le rayon de convergence de cette série entière est infini. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r\,/\,(p\,n)!\,z^{pn} \text{ est infini.}}$$

> Plus généralement, si R désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\,z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\,z^{pn}$ vaut $\sqrt[p]{\mathrm{R}}$. Ce résultat est valable pour $\mathrm{R} = +\infty$ si l'on convient que $\sqrt[p]{+\infty} = +\infty$.

2 Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, on peut écrire

$$\mathrm{S}_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^0}{n\,!}\,x^n$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{\,x} - 1}$$

De même, la question 1 permet d'affirmer l'existence de la somme infinie

$$\mathrm{S}_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^0}{(2n)\,!}\,x^{2n}$$

puis
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,2}(x) = \mathrm{ch}\,(x) - 1}$$

> Rappelons les sommes de séries entières suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$:
> $$\mathrm{e}^{\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} \qquad \mathrm{ch}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \mathrm{sh}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

De plus, on a les équivalents suivants :

$$\mathrm{e}^{\,x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{Les énoncés } \mathrm{H}_{0,1} \text{ et } \mathrm{H}_{0,2} \text{ sont valides.}}$

II. Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

3 Pour montrer que la variable aléatoire $(Z_x)^r$ admet une espérance finie, il suffit, d'après le théorème de transfert, d'établir que la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{n}{x}\right)^r \mathbb{P}(X_x = n) = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^r\,x^n}{n\,!}$$

converge absolument. Or, la question 1 permet d'affirmer que cette série est effectivement absolument convergente en prenant $p = 1$. Ainsi, la variable aléatoire $(Z_x)^r$ admet une espérance finie et celle-ci vaut

$$\boxed{\mathbb{E}\left[(Z_x)^r\right] = \frac{e^{-x}}{x^r}\,S_{r,1}(x)}$$

4 L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $x > 0$ sont égales et valent x, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathbb{E}(X_x) = \mathbb{V}(X_x) = x}$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire réelle de variance finie Z_x. Comme $x^{-1/3} > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\,|Z_x - \mathbb{E}(Z_x)| > x^{\frac{-1}{3}}\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_x)}{\big(x^{\frac{-1}{3}}\big)^2}$$

Or, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_x) = \dfrac{1}{x}\,\mathbb{E}(X_x)$, et donc

$$\mathbb{E}(Z_x) = \frac{1}{x}\times x = 1$$

De même, $$\mathbb{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbb{V}(X_x) = \frac{1}{x^2}\times x = \frac{1}{x}$$

Ainsi, $$\mathbb{P}\big(\,|Z_x - 1| \geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big) \leqslant \frac{1/x}{x^{\frac{-2}{3}}} = x^{\frac{-1}{3}}$$

Or, $x^{\frac{-1}{3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et une probabilité est toujours positive donc, par encadrement,

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\,|Z_x - 1| \geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

> Il ne faudrait pas conclure en invoquant un passage à la limite ! En effet, le passage à la limite suppose que les limites existent justement. Ici, on encadre une quantité par deux autres qui convergent vers la même limite car
>
> $$0 \leqslant \mathbb{P}\big(\,|Z_x - 1| \geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big) \leqslant x^{\frac{-1}{3}}$$
>
> Comme $$x^{-1/3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
>
> on montre d'une part que la limite de la probabilité au centre existe quand x tend vers $+\infty$, et d'autre part que cette limite vaut nécessairement 0.

5 Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(Z_x)^r$. Comme par hypothèse $x > 1$, on a $(1-x^{-1/3}) > 0$, donc $(1-x^{-1/3})^r$ est bien défini et strictement positif. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[(Z_x)^r \geqslant \big(1 - x^{\frac{-1}{3}}\big)^r\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((Z_x)^r\right)}{\big(1 - x^{\frac{-1}{3}}\big)^r}$$

Mines Maths 2 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) ; il a été relu par David Michel (ENS Rennes) et William Aufort (professeur en CPGE).

L'objectif de cette épreuve est d'étudier la dérivabilité en 0 et en π de la fonction R définie par la somme d'une série de fonctions :

$$\mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

Le sujet comporte quatre parties.

- Dans la partie I, il est demandé d'établir des résultats élémentaires de convergence d'une série de fonctions et d'une intégrale. Cette partie se termine par la preuve qu'une certaine intégrale à paramètre définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Dans la partie II, on établit la non-dérivabilité en 0 de R. Pour cela, on prouve une égalité entre une fonction définie par une série et une intégrale à paramètre. Le calcul de l'équivalent de R en 0 se fait notamment en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.
- Dans la partie III, on démontre une formule sommatoire dite de Poisson. Pour ce faire, on prouve la continuité et la $2\pi-$périodicité de deux fonctions avant d'en calculer les coefficients de Fourier complexes. Les objets sont définis dans le sujet et un résultat central est admis. Il est besoin d'établir certaines inégalités techniques.
- Enfin dans la partie IV, on établit la dérivabilité en π de la fonction R. Pour cela, on démontre de façon classique le caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une certaine fonction qui est a priori définie par morceaux. Puis, à grand renfort d'intégrations par parties, la convergence d'une intégrale ainsi que des inégalités afin d'appliquer la formule sommatoire de Poisson. Ce travail débouche sur l'existence pour R d'un développement limité au voisinage de π qui permet de conclure.

Ce sujet est classique et parcourt une bonne partie du programme d'analyse de la filière PC. La moitié des questions environ sont relativement faciles, d'autres sont des variations de méthodes classiques. Enfin, certaines questions réclament de vérifier scrupuleusement les conditions d'application des résultats prouvés ou admis. Plus précisément, ce sujet aborde les fonctions d'une variable réelle, les suites et séries de fonctions, l'intégration sur un intervalle quelconque et les intégrales à paramètre.

Indications

Partie II

5 Utiliser la convergence de S établie en question 4 pour justifier de la convergence de l'intégrale.

6 Utiliser une minoration de $\lfloor x \rfloor$ à partir de l'inégalité qui la définit.

7 Utiliser la limite par la caractérisation séquentielle de la limite à l'aide du théorème de convergence dominée. La majoration se fait par morceaux à l'aide de celle obtenue en question 6.

8 Appliquer le résultat de la question 7 à la fonction $x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ convenablement prolongée par continuité en 0. Veiller à bien établir la condition de domination nécessaire. Exprimer ensuite $\mathrm{S}(h)$ en fonction de R, ce qui permet d'en déduire l'équivalent de R à droite de 0. Conclure enfin sur la dérivabilité de R en 0 avec le taux d'accroissement.

Partie III

9 Prouver la convergence normale sur tout segment.

11 Utiliser le résultat admis sur les séries de Fourier, à savoir que si deux fonctions continues et 2π-périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier complexes, alors elles sont égales.

12 Appliquer la formule précédente à la fonction $h(t) = f\,(at/2\pi)$ ce qui conduit à vérifier une majoration sur $f\,(at/2\pi)$ et une majoration sur $\widehat{f}\,(2\pi x/a)$.

Partie IV

15 Procéder à une réduction du domaine par parité de la fonction. Effectuer ensuite le changement de variable $x \mapsto x^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il en résulte une intégrale dont la partie sur $]\,0\,;1\,]$ converge classiquement. Pour le morceau restant, effectuer une intégration par parties.

16 Intégrer deux fois par partie l'application $x \mapsto x^2\widehat{f}(x)$ et utiliser les questions 14 et 15 pour prouver l'existence de l'intégrale et établir le résultat demandé.

17 Appliquer la formule sommatoire de Poisson établie en question 12 à la fonction f. Pour justifier que f vérifie les hypothèses de la formule, utiliser la question 16, sans oublier de vérifier que $\widehat{f}$ est bien définie et continue. Le terme b se déduit rapidement mais le terme a requiert le calcul de $\widehat{f}(0)$ ce qui se fait par intégration par parties.

18 Remarquer que n et n^2 ont la même parité ce qui permet une compensation des termes en sommant $\mathrm{F}\,(4x)$ et $\mathrm{F}\,(x+\pi)$.

19 Utiliser la question 18 pour obtenir une expression de $\mathrm{F}(x+\pi)$ dont on déduit un développement limité à l'aide de la formule de la question 17.

I. Préliminaires

1 La fonction R est la somme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont on va vérifier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n\colon x \mapsto \sin(n^2 x)/n^2$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et par majoration classique de la fonction sinus, on a

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ceci prouve la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $\mathbb{R}$ donc sa convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$. Dès lors,

$$\boxed{\text{La fonction R est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2 Tout d'abord, la fonction $g\colon x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Au voisinage de 0,

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

par équivalent classique de la fonction sinus au voisinage de 0. Dès lors, g est prolongeable par continuité en $x = 0$ par la valeur 1. L'intégrale proposée est par conséquent faussement impropre en 0 et

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge. Pour $x \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

par majoration classique du sinus. La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par le critère de Riemann. Dès lors, la fonction g est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

3 La fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f, c'est une notion d'analyse harmonique qui sert notamment en théorie du signal.

Il s'agit ici d'une intégrale à paramètre, on va par conséquent appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est et que $t \mapsto e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$, avec $|f|$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

$$\boxed{\text{Les conditions étant vérifiées, la fonction } \widehat{f} \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

II. Étude de la dérivabilité de R en 0

4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. En utilisant les hypothèses faites sur f, il vient

$$|f(nh)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2+1} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2}$$

ce qui prouve qu'à partir du rang $n = 1$ le terme général de $\mathrm{S}(h)$ est majoré par celui d'une série convergente d'après le critère de Riemann. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{S}(h) \text{ existe pour tout } h > 0.}$$

5 Cette question demande d'établir un lien entre une série et une intégrale. Il faut donc s'inspirer de la démonstration du théorème de comparaison série-intégrale. Par ailleurs, les questions mettant en jeu une partie entière sont souvent facilement réglées en se ramenant à l'inégalité la caractérisant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$. Pour tout $t \in [\,nh\,;(n+1)h\,[$ on a, par définition de la partie entière, $\lfloor t/h \rfloor = n$ d'où $\phi_h(t) = f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right) = f\left(nh\right)$ et

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)\,\mathrm{d}t = f\left(nh\right)\int_{nh}^{(n+1)h}\mathrm{d}t = hf\left(nh\right)$$

par linéarité de l'intégrale. Cette égalité et la convergence de S prouvent celles de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_{nh}^{(n+1)h}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

et la relation de Chasles donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

En conclusion, on a bien $\boxed{\mathrm{S}(h) = \int_0^{+\infty}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t}$

6 Ici l'inégalité demandée s'établit, comme c'est parfois le cas, en « inversant » celle donnée par la partie entière.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

D'une part, en appliquant l'inégalité vérifiée par f, on a

$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)^2+1} \tag{1}$$

D'autre part, comme $t \geqslant 1$ et $h \in \,]\,0\,;1\,]$, en utilisant l'inégalité sur les parties entières on a

$$0 \leqslant t-1 \leqslant t-h = \left(\frac{t}{h}-1\right)h < \left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor h$$

Mines Informatique MP-PC-PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Ce sujet aborde plusieurs problèmes numériques liés aux nombres premiers, notamment leur génération et leur comptage. Il est relativement complet, bien posé, et couvre une grande partie du programme.

- La première partie est peu liée au reste et demande l'écriture et la compréhension de fonctions simples. Elle aborde également la représentation des nombres réels en machine.
- La deuxième partie est consacrée à la génération de nombres premiers. Elle débute par la méthode classique du crible d'Ératosthène. L'algorithme est donné, il faut simplement l'implémenter et réfléchir à sa complexité et aux contraintes de mémoire. Une méthode plus efficace pour les grands nombres, qui s'appuie sur le test probabiliste de primalité de Fermat, est ensuite décrite et doit également être implémentée.
- La troisième partie aborde le problème de la répartition des nombres premiers, et plus particulièrement le calcul de la fonction $\pi(n)$, qui renvoie le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[\![1\,; n]\!]$. On peut la calculer directement avec le crible d'Ératosthène vu dans la partie précédente, mais cette approche souffre évidemment des mêmes défauts. On utilise alors l'équivalence des fonctions π et li (logarithme intégral) à l'infini, en approchant $\pi(n)$ par $\mathrm{li}(n)$. Le calcul de cette fonction nécessite l'intégration de l'inverse du logarithme, que l'on réalise ici par la méthode des rectangles. Le calcul est délicat à cause de la singularité en 1. Enfin, on exploite une identité mathématique reliant li à une série que l'on peut calculer avec une plus grande précision numérique.
- La dernière partie, très courte, porte sur les bases de données.

Il n'y a pas lieu de se laisser intimider par le thème, l'énoncé paraît plus mathématique qu'il n'est en réalité !

Indications

Partie I

3 Rappel : `/` est l'opérateur associé à la division flottante en Python.

4 Attention, x est sobrement défini par le sujet comme un « nombre » ; donc pas forcément entier. Faire attention au cas $0 < x < 1$. On peut utiliser une récurrence pour répondre rigoureusement à la question.

Partie II

8 Veiller aux erreurs « off-by-one » (erreurs de décalage) possibles entre l'entier `i` et la liste `liste_bool`.

12 Ne pas oublier d'importer les modules nécessaires à l'utilisation des fonctions demandées.

13 On a le droit de définir une fonction annexe pour le test de primalité de Fermat, qui est répété quatre fois.

14 Attention à ne pas appeler la fonction `erato_iter` plus que nécessaire.

Partie III

19 Question de cours. Faire en sorte de minimiser les imprécisions numériques, voir question 5.

22 Observer que suffisamment proche de 1, les rectangles à gauche et à droite s'annulent quasiment deux à deux en cascade, sauf un de chaque côté. C'est leur somme qui forme la différence absolue observée.

24 Attention à la confusion entre x et $\ln x$ dont l'utilisation par le sujet peut être troublante.

26 On pourra faire appel aux commandes `COUNT` (qui compte le nombre d'enregistrements) et `AVG` (qui calcule leur moyenne). Pour la deuxième question, la commande `MINUS` (ou `EXCEPT`) s'avère utile.

I. Préliminaires

1 Afin d'utiliser les fonctions d'un module, il faut l'importer. Si l'on n'a besoin que de quelques fonctions du module, et qu'il n'y a pas de risque de confusion avec des fonctions d'autres modules, on peut les importer spécifiquement dans l'espace de noms global du programme :

```
from math import log, sqrt, floor, ceil
print(log(0.5))
```

> Cette réponse est celle que le sujet semble attendre, mais on aurait également pu importer tout le module d'un coup, en faisant attention par la suite à appeler les fonctions dans l'espace de noms du module :
>
> ```
> import math
> print(math.log(0.5))
> ```
>
> On peut également importer toutes les fonctions du module dans l'espace de noms global avec `from math import *`, mais c'est déconseillé parce qu'on risque de masquer des fonctions déjà existantes.

2 On teste la condition au sein de l'instruction `return` et on renvoie directement sa valeur :

```
def sont_proches(x, y):
    atol = 1e-5
    rtol = 1e-8
    return abs(x - y) <= atol + abs(y) * rtol
```

> Attention à ne pas proposer la version suivante :
>
> ```
> def sont_proches(x, y):
>     atol = 1e-5
>     rtol = 1e-8
>     if abs(x - y) <= atol + abs(y) * rtol:
>         return True
>     else:
>         return False
> ```
>
> qui est un « anti-pattern » (un motif à ne pas reproduire). En effet, la condition est inutile puisque l'inégalité renvoie déjà les mêmes booléens, et on n'est même pas à l'abri de se tromper de sens en les recopiant.

3 En déroulant mécaniquement l'exécution du programme, on peut démontrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\texttt{mystere(1001, 10)} &= 1 + \texttt{mystere(100.1, 10)}\\
&= 1 + (1 + \texttt{mystere(10.01, 10)})\\
&= 1 + (1 + (1 + \texttt{mystere(1.001, 10)}))\\
\texttt{mystere(1001, 10)} &= 1 + (1 + (1 + 0))
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\texttt{mystere(1001, 10)} = 3}$

$\boxed{4}$ L'exemple précédent montre que chaque appel à la fonction ajoute 1 au résultat tout en divisant le premier paramètre par b. Considérons $x \geqslant 1$. On a donc

$$\text{mystere}(x, b) = 1 + \text{mystere}\left(\frac{x}{b}, b\right)$$

ou encore

$$\text{mystere}(x, b) = k + \text{mystere}\left(\frac{x}{b^k}, b\right)$$

jusqu'à ce que $x/b^k < b$, cas de base où la fonction renvoie 0 et la récursion s'arrête. Le résultat est donc l'entier k tel que

$$\frac{x}{b^k} < b \leqslant \frac{x}{b^{k-1}}$$

où la première inégalité représente la condition d'arrêt et la seconde le test de l'avant-dernier appel. On a donc

$$\frac{x}{b} < b^k \leqslant x$$

L'astuce consiste à prendre le logarithme en base b pour obtenir

$$\log_b x - 1 < k \leqslant \log_b x$$

où l'on reconnaît $k = \lfloor \log_b x \rfloor$.

Il reste à traiter la situation $0 < x < 1$. Dans ce cas, `mystere(x, b)` est nul, ce qui ne correspond plus à la partie entière du logarithme de x. On peut soit regrouper les cas avec un maximum, ce qui affaiblit un peu la formulation mathématique :

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \texttt{mystere(x, b)} = \max(0, \lfloor \log_b(x) \rfloor)}$$

soit définir la fonction par morceaux :

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \texttt{mystere(x, b)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \lfloor \log_b(x) \rfloor & \text{sinon} \end{cases}}$$

Une démonstration par récurrence permettrait une réponse plus rigoureuse. Pour cela, fixons un b arbitraire. On va démontrer par récurrence sur n que l'hypothèse

$$\mathscr{P}(n): \quad « \forall x \in [\![b^n \,; b^{n+1} - 1]\!] \quad \texttt{mystere(x, b)} = \lfloor \log_b x \rfloor »$$

est vraie pour tout n entier naturel.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$: le cas de base est $1 \leqslant x < b$. Dans ces conditions, on a

  $$\texttt{mystere(x, b)} = 0$$

  La fonction $\log_b$ est strictement monotone croissante, avec $\log_b(1) = 0$ et $\log_b(b) = 1$, donc on a bien $\lfloor \log_b x \rfloor = 0$.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: supposons que l'hypothèse est vraie pour n. Alors, pour un x tel que $b^{n+1} \leqslant x < b^{n+2}$, on a

  $$\begin{aligned} \texttt{mystere(x, b)} &= 1 + \texttt{mystere(x / b, b)} \quad (\text{où } b^n \leqslant \frac{x}{b} < b^{n+1}) \\ &= 1 + \lfloor \log_b(x/b) \rfloor \qquad (\text{par } \mathscr{P}(\text{n})) \\ &= 1 + \lfloor \log_b(x) - 1 \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_b(x) \rfloor - 1 \\ \texttt{mystere(x, b)} &= \lfloor \log_b(x) \rfloor \end{aligned}$$

X/ENS Maths PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sélim Cornet (ENS Paris-Saclay) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Dans ce sujet, on étudie des propriétés sur les modules de polynômes à coefficients complexes, que l'on applique ensuite pour obtenir des inégalités dans le domaine des probabilités. Il est composé d'une partie préliminaire puis de quatre parties quasiment indépendantes. Chacune des parties 1 à 3 démontre un théorème à utiliser dans les suivantes.

- La partie préliminaire définit les matrices unitaires et présente quelques-unes de leurs propriétés.
- Dans la première partie, on montre que le module maximum d'un polynôme à coefficients complexes sur le disque unité est atteint sur le bord, en utilisant des matrices unitaires.
- Dans la seconde partie, on minore le module d'un polynôme à coefficients dans $\{-1\,;0\,;1\}$ sur un arc du cercle unité.
- Dans la troisième partie, on majore la probabilité qu'une moyenne de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une loi de Bernoulli, s'éloigne de son espérance en utilisant l'inégalité de Markov.
- Enfin, dans la quatrième partie, on cherche à reconstituer avec grande probabilité un mot binaire x à partir d'un grand nombre d'observations bruitées $\mathrm{O}(x)$.

Curieusement, ce sujet utilise exclusivement des outils de première année : matrices, inégalités, étude de fonctions simples, intégration d'inégalités, probabilités sur des ensembles finis. Il est de difficulté progressive, balaye un large spectre de chapitres et fournit une bonne révision entre les deux années de prépa.

Indications

1 S'inspirer de l'écriture matricielle du produit scalaire dans un espace euclidien.

2 Utiliser la question 1 et la définition d'une matrice unitaire.

3 Montrer séparément les deux inégalités.

4 Montrer que si U est unitaire, alors U^{-1} également. Montrer séparément les deux inégalités.

5 Effectuer le calcul ${}^t\overline{\mathrm{M}}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_{n+1}$.

6 Remarquer que multiplier une matrice par P à droite revient à en prendre la première colonne, et que multiplier par ${}^t\mathrm{P}$ à gauche revient à en prendre la première ligne.

7 Utiliser la bilinéarité du produit matriciel, puis la définition de la norme d'une matrice dans l'énoncé.

8 Écrire $\mathrm{M} = \mathrm{UDU}^{-1}$ avec U unitaire, vérifier que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{U}f(\mathrm{D})\mathrm{U}^{-1}$ et utiliser la question 3.

9 Utiliser l'inégalité triangulaire.

10.a Utiliser le théorème 1.

10.b Montrer qu'un des $z_0 \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi j}{\mathrm{L}}}$ pour $0 \leqslant j \leqslant \mathrm{L}-1$ possède un argument appartenant à l'intervalle $[\,-\pi/\mathrm{L}\,;\pi/\mathrm{L}\,]$, puis utiliser la question 9.

11 Utiliser les questions 10.a et 10.b pour le cas $a_0 = 1$, puis s'y ramener pour les autres cas.

12.a Calculer successivement $g'(x)$ et $g''(x)$.

12.b Effectuer un changement de coordonnées polaires pour exprimer $g''(x)$.

12.c Intégrer des inégalités.

13.a Raisonner géométriquement pour observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x-q| \leqslant |x-p| \quad \text{si et seulement si} \quad x \geqslant \frac{p+q}{2}$$

13.b Utiliser le théorème du transfert.

13.c Appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{u\mathrm{S}_n}$.

13.d Mettre à profit les questions 12.c et 13.c.

14 Utiliser les questions 13.a et 13.d si $p < q$. Sinon, considérer les variables aléatoires $\mathrm{X}'_i = 1 - \mathrm{X}_i$.

15.b Se servir de la relation $|z|^2 = z\overline{z}$ et de la question 15.a.

16.a Décrire l'événement ($\mathbf{N} \geqslant j+1$ et $\mathrm{I}_j = k$) par la phrase « le j-ième 1 dans la suite $(\mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_k)$ est obtenu au rang k ».

16.b Utiliser que $\mathbf{O}_j(x) = 1$ si et seulement si $\mathbf{N} \geqslant j+1$ et $x_{\mathrm{I}_j} = 1$.

16.c Faire appel à la linéarité de l'espérance.

17.a Invoquer le théorème 2.

17.b Utiliser l'inégalité triangulaire et la question 17.a avec w bien choisi.

17.c Raisonner par l'absurde et contredire le résultat de la question 17.b.

18 Utiliser la sous-additivité d'une probabilité pour montrer l'indication fournie par l'énoncé, puis la question 17.c et le théorème 3.

Préliminaires

1 Soit $x \in \mathbb{C}^n$, de coordonnées $(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Calculons le nombre complexe suivant, vu comme un élément de $\mathscr{M}_1(\mathbb{C})$

$$^t\overline{x}\,x = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2 = \|x\|_2{}^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}^n \quad {}^t\overline{x}\,x = \|x\|_2{}^2}$$

2 Soit $x \in \mathbb{C}^n$. D'après la question 1 et comme ${}^t\overline{\mathrm{U}}\,\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$, on a

$$\|\mathrm{U}x\|_2{}^2 = {}^t\overline{\mathrm{U}x}\,\mathrm{U}x = {}^t\overline{x}\;{}^t\overline{\mathrm{U}}\,\mathrm{U}x = {}^t\overline{x}\,\mathrm{I}_n x = {}^t\overline{x}\,x = \|x\|_2{}^2$$

Comme ces nombres sont positifs, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|\mathrm{U}x\|_2 = \|x\|_2}$$

3 Remarquons d'abord que les normes des matrices sont bien définies. En effet, la norme 2 est la racine carrée d'une fonction polynomiale en les coordonnées de $\mathbb{C}^n$, donc continue, et on considère cette fonction sur $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ qui est un ensemble fermé et borné de l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}^n$. Celle-ci est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui prouve l'existence de la borne supérieure.

> La norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est appelée norme subordonnée.

Pour tout $x = {}^t(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x\|_2 = 1$, comme $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_0, \ldots, d_{n-1})$, on a $\mathrm{D}x = {}^t(d_0 x_0, \ldots, d_{n-1} x_{n-1})$. Posons $\mathrm{M} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |d_i| \in \mathbb{R}_+$ et calculons

$$\|\mathrm{D}x\|_2{}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{d_i}\,\overline{x_i} d_i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} |d_i|^2 |x_i|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{M}^2 |x_i|^2 = \mathrm{M}^2 \|x\|_2{}^2 = \mathrm{M}^2$$

Ainsi,

$$\|\mathrm{D}\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{S}_n} \|\mathrm{D}x\|_2 \leqslant \mathrm{M}$$

Soit $i_0 \in [\![0\,; n-1]\!]$ vérifiant $|d_{i_0}| = \mathrm{M}$. Pour $y = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec un 1 au rang i_0 et des 0 ailleurs, on a $y \in \mathbb{S}_n$ et $\mathrm{D}y = {}^t(0, \ldots, 0, d_{i_0}, 0, \ldots, 0)$, d'où $\|\mathrm{D}y\|_2{}^2 = |d_{i_0}|^2 = \mathrm{M}^2$ et $\|\mathrm{D}y\|_2 = \mathrm{M}$. On obtient

$$\|\mathrm{D}\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{S}_n} \|\mathrm{D}x\|_2 \geqslant \|\mathrm{D}y\|_2 \geqslant \mathrm{M}$$

Finalement,

$$\boxed{\|\mathrm{D}\| = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |d_i|}$$

4 Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec U unitaire vérifiant $\mathrm{B} = \mathrm{UAU}^{-1}$. Remarquons que U^{-1} est également unitaire car

$$^t\big(\overline{\mathrm{U}^{-1}}\big) = \big({}^t\overline{\mathrm{U}}\big)^{-1}$$

En effet, pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, d'après le cours ${}^t\big(\mathrm{M}^{-1}\big) = \big({}^t\mathrm{M}\big)^{-1}$, et $\overline{\mathrm{M}^{-1}} = \overline{\mathrm{M}}^{-1}$ car

$$\overline{\mathrm{M}^{-1}} \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{I}_n} = \mathrm{I}_n$$

la conjugaison dans $\mathbb{C}$ commutant avec les additions et les multiplications.

Pour $x \in \mathbb{S}_n$, d'après la question 2, $\|\mathrm{U}^{-1}x\|_2 = \|x\|_2 = 1$ et

$$\|\mathrm{B}x\|_2 = \|\mathrm{UAU}^{-1}x\|_2 = \|\mathrm{AU}^{-1}x\|_2 \leqslant \|\mathrm{A}\|$$

car $\|\mathrm{U}^{-1}x\|_2 = 1$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{S}_n$, on a $\|\mathrm{B}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|$. Par symétrie, comme $\mathrm{A} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{BU}$, on a $\|\mathrm{A}\| \leqslant \|\mathrm{B}\|$.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{B} = \mathrm{UAU}^{-1} \text{ avec U unitaire, alors } \|\mathrm{B}\| = \|\mathrm{A}\|.}$$

Première partie

5 Pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, le coefficient $m_{k+1,k}$ de M à la $(k+1)$-ième ligne et la k-ième colonne vaut 1, puisque c'est le coefficient diagonal du bloc I_{n-1}. Notons

$$\mathrm{N} = {}^t\overline{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \overline{z} & \sqrt{1-|z|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \\ \sqrt{1-|z|^2} & -z & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a de même $n_{k,k+1} = 1$ pour $k \in [\![2\,;n]\!]$. On obtient

$${}^t\overline{\mathrm{M}}\,\mathrm{M} = \begin{pmatrix} z\overline{z} + \sqrt{1-|z|^2}^{\,2} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \sqrt{1-|z|^2}^{\,2} + \overline{z}z \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{n+1}$$

car $z\overline{z} + \sqrt{1-|z|^2}^{\,2} = |z|^2 + 1 - |z|^2 = 1$ et pour $k \in [\![2\,;n]\!]$,

$$\sum_{\ell=0}^{n} n_{k,\ell}\, m_{\ell,k} = n_{k,k+1}\, m_{k+1,k} = 1$$

les autres calculs étant des sommes de 0. Ainsi, M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = {}^t\overline{\mathrm{M}}$, d'où $\mathrm{M}\,{}^t\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_{n+1}$ également. En conclusion,

$$\boxed{\text{La matrice M est unitaire.}}$$

> Les matrices unitaires interviennent dans le cadre des espaces hermitiens, qui sont l'analogue des espaces euclidiens pour des espaces vectoriels complexes de dimension finie.

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour objectif la réalisation de fonctions qui pourraient se trouver à la base d'un jeu de stratégie, dans lequel un barreau vertical de k cases colorées descend, guidé par le joueur, comme dans le célèbre jeu Tetris. Lorsqu'il touche le sol, les alignements de cases de même couleur sont supprimés et des points sont marqués. Si l'interface graphique et les actions du joueur ne sont pas abordées, le sujet traite néanmoins un grand nombre de problématiques telles que l'initialisation du jeu, les déplacements, la détection d'alignements, les suppressions et le comptage des points. L'étude est divisée en cinq parties de tailles variées.

- La première partie étudie l'initialisation de la grille et son affichage en deux questions plutôt abordables.
- On traite ensuite l'apparition du barreau et ses différents mouvements : descente case par case ou plus rapide, déplacement latéral, permutation des cases. Les questions sont d'un niveau intermédiaire et contiennent peu de pièges. Elles demandent avant tout une manipulation correcte de la liste de listes qui modélise la grille du jeu.
- La troisième partie, plus longue que les autres, constitue le cœur de l'épreuve et nous fait inspecter une grille où un barreau vient de toucher le sol. Il faut détecter les alignements de couleurs, les supprimer, faire descendre les cases qui se trouvent alors suspendues et ainsi de suite. Les fonctions à produire sont plus longues et plus élaborées.
- La quatrième partie n'est constituée que de deux questions, traitant une variante bien plus complexe de détection des alignements. Ces questions sont plus difficiles car moins directives. La deuxième en particulier requiert l'analyse assez fine d'un code de plus de cinquante lignes, peu envisageable en moins de dix minutes.
- Enfin, la gestion d'une base de données contenant les scores de plusieurs parties et de plusieurs joueurs est abordée. L'ensemble des quatre questions permet d'évaluer correctement les candidats sur l'écriture de requêtes SQL.

Ce sujet est progressif et intéressant. Le contexte du jeu de grille est séduisant, même si la référence à Tetris ne fonctionne peut-être pas aussi bien avec les élèves qu'avec leurs professeurs, qui d'ailleurs peuvent être déçus du lien finalement quelque peu éloigné avec le jeu original. Si les questions 14 et 15 ne sont accessibles qu'aux meilleurs candidats dans le temps imparti, les autres construisent un sujet bien équilibré et classant, accessible (hors partie 4) dès la première année. Les chapitres d'ingénierie numérique ne sont pas abordés.

Indications

Partie I

2 Le parcours de la grille doit se faire par deux boucles `for` imbriquées, dans le bon sens : la boucle la plus interne permet de décrire une ligne.

Partie II

3 Il faut tester chaque colonne séparément sur les `k` cases les plus élevées, mais il est inutile de tester obligatoirement toutes les colonnes. Un `return` dans une boucle `for` permet une sortie anticipée.

4 Afin de ne réaliser la modification que si la case sous le barreau existe et est vide, il est possible de placer la boucle de déplacement à l'intérieur d'un test `if`.

5 Si une des cases de destination n'est pas vide, l'algorithme doit s'arrêter sans réaliser le déplacement. L'instruction `return None` est alors toute indiquée.

6 Il faut remplacer les cases de haut en bas, en faisant très attention à traiter toutes les cases du barreau et seulement celles-là.

7 On doit commencer par parcourir la grille vers le bas à partir de (`x`,`y`) pour déterminer la distance de déplacement du barreau, et le déplacer alors en une seule boucle. La procédure `deplacerBarreau` n'est pas utilisable.

Partie III

9 Il faut, lors de l'unique parcours autorisé de `rangee`, compter le nombre de cases adjacentes de même couleur. À chaque changement de couleur, on peut remettre à zéro un compteur après avoir modifié `marking` sur le bon nombre de cases. Attention à ne pas oublier l'éventuel dernier alignement.

10 Utiliser la fonction `detecteAlignement` en construisant la bonne rangée avant.

11 Il faut appliquer consécutivement la fonction `scoreRangee` sur toutes les rangées pouvant exister dans la grille. Il est donc important de les prévoir correctement, en s'aidant de schémas. Attention à ne pas traiter deux fois la même rangée.

12 Plusieurs techniques sont possibles. On peut par exemple parcourir chaque colonne de bas en haut en gardant dans une variable supplémentaire la position de la case de destination des déplacements.

Partie IV

14 Pour que la fonction puisse s'exécuter récursivement sans revenir sans cesse sur les mêmes cases, il faut modifier `grille` en effaçant les cases déjà parcourues. Les codes donnés dans l'énoncé aux figures 9 et 10 ne font pas partie de cette question.

15 La principale difficulté est dans la fonction `exploreHorizontal`. Il faut essayer de comprendre son fonctionnement global et d'en déduire quel genre de disposition de cases pourrait conduire à en oublier.

Partie V

17 Il faut compter le nombre de scores meilleurs que `s`.

18 Il s'agit ici d'obtenir la valeur maximale d'un champ.

19 Sélectionner les joueurs ayant un meilleur score que le joueur concerné nécessite l'insertion d'une sous-requête dans la clause `WHERE` et une agrégation de résultats. Le comptage des joueurs doit s'effectuer dans un deuxième temps, à l'aide d'une deuxième agrégation.

I. Initialisation et affichage de l'aire de jeu

1 La fonction `creerGrille` doit créer une par une chaque case de la grille et les assembler dans les deux directions.

```
def creerGrille(largeur,hauteur):
    grille = []
    for i in range(largeur):
        colonne = []
        for j in range(hauteur):
            colonne.append(VIDE)
        grille.append(colonne)
    return grille
```

> D'après l'énoncé, `VIDE` est une variable globale, déjà définie. Il ne faut donc pas l'entourer de guillemets, ni réaliser d'affectation de cette variable.
>
> Attention à ne pas recopier `largeur` fois la même colonne. En effet, les colonnes étant des listes, créer une unique colonne et la copier plusieurs fois conduirait à créer des colonnes aux valeurs toujours identiques. Par exemple,
>
> ```
> colonne = [0,0,0]
> grille = []
> for i in range(4):
>     grille.append(colonne)
> grille[2,1] = 1
> ```
>
> construit une `grille` égale à `[[0,1,0],[0,1,0],[0,1,0],[0,1,0]]`.
>
> Créer chaque colonne en une ligne à l'aide de la syntaxe `liste*entier` permet de réaliser un code correct plus compact :
>
> ```
> def creerGrille(largeur,hauteur):
>     grille = []
>     for i in range(largeur):
>         grille.append([VIDE]*hauteur)
>     return grille
> ```
>
> L'énoncé rappelle en préambule comment définir en compréhension une liste contenant n occurrences d'une valeur k. Ce type de syntaxe permet en effet d'écrire un code bien plus compact avec
>
> ```
> def creerGrille(l,h):
>     return [ [ VIDE for j in range(h) ] for i in range(l) ]
> ```

2 La procédure `afficheGrille` doit lire chaque ligne en partant de la plus « haute », c'est-à-dire la fin de chaque colonne.

```
def afficherGrille(grille):
    largeur = len(grille)
    hauteur = len(grille[0])
    for j in range(hauteur-1,-1,-1):
        for i in range(largeur):
            if grille[i][j] == VIDE:
                afficheBlanc()
            else:
                afficheCouleur(grille[i][j])
        nouvelleLigne()
```

La procédure `nouvelleLigne` peut aussi être positionnée en début de première boucle. Les indications de l'énoncé sont insuffisantes pour choisir la meilleure position, mais celle adoptée ici correspond à une écriture classique des procédures `afficheBlanc`, `afficheCouleur` et `nouvelleLigne` de la forme

```
def afficheBlanc():
    print(' ',end='')
def nouvelleLigne():
    print()
```

où `nouvelleLigne` crée ainsi un retour à la ligne, inutile en début d'affichage mais nécessaire à la fin.

II. Création et mouvement du barreau

3 La fonction `grilleLibre` permet de déterminer si `k` cases verticalement adjacentes sont vides en haut de grille. Dès que l'on obtient un tel alignement, il est donc possible d'arrêter la recherche.

```
def grilleLibre(grille,k):
    largeur = len(grille)
    hauteur = len(grille[0])
    for i in range(largeur):
        # Marqueur indiquant si la colonne a assez de cases libres
        placelibre = True
        # Si une case est prise, on change le marqueur
        for j in range(hauteur-k, hauteur):
            if grille[i][j] != VIDE:
                placelibre = False
        # Si on a trouvé une colonne disponible, on s'arrête
        if placelibre:
            return True
    # Si on arrive ici, il n'y a aucune colonne disponible
    return False
```

Dans le pire des cas, on inspecte les `k` plus hautes cases de chaque colonne de la grille. L'inspection d'une case, contenue dans la deuxième boucle, est de complexité constante. La complexité totale est donc

$$\boxed{\mathrm{O}(k \times \texttt{largeur})}$$

L'hypothèse de non-tassement de la grille semble étonnante, la grille étant naturellement toujours tassée lorsqu'un barreau apparaît. On peut imaginer qu'il s'agit simplement de s'assurer que la seule réponse correcte soit de complexité $\mathrm{O}(k \times \texttt{largeur})$.