

Sommaire

Notations	22	IV Théorèmes limites	
Introduction	24		
I Introduction heuristique		20 Convergences	409
1 Probabilités (heuristique)	31	21 Loi des grands nombres	445
2 Variable aléatoire (heuristique)	57	22 Le théorème central limite	471
		23 Techniques d'approximations	481
		24 Espérance conditionnelle	503
II Théorie et Pratique		V Quelques applications	
3 Espaces probabilisé	79	25 Résultats élégamment établis...	529
4 Conditionnement	103	26 Simuler informatiquement une loi	545
5 Indépendance (1/2)	113	27 Méthodes de Monte-Carlo	567
6 Variables aléatoires discrètes	129	28 Chaînes de Markov	585
7 Espérance de v.a. discrètes	145	29 Arithmétique et probabilités	613
8 Couples de v.a. discrètes	177	30 Bosons, fermions et boltzmannions	623
9 Le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	209	31 Processus de Poisson	637
10 Variables aléatoires à densité	231	32 Mouvements browniens	645
11 Espérance d'une v.a. à densité	253	33 Estimation bayésienne	677
12 Couples de v.a. à densité	265	34 Loi de l'Arc sinus et séries aléatoires	681
13 Exercices et problèmes	297	35 À propos de quelques paradoxes	691
III Plus formellement...		A Annexes	
14 Variables aléatoires (cas général)	317	A Éléments d'analyse et d'algèbre	703
15 L'espérance comme intégration...	333	B Davantage sur la mesure	733
16 Vecteurs aléatoires	357	C Théorèmes d'existence	747
17 Indépendance (2/2)	367	D Lexique français-anglais	753
18 Fonctions caractéristiques	383		
19 Vecteurs gaussiens (*)	391		

Table des matières

Introduction	24
§ 1. Les lois du hasard	24
§ 2. But de la théorie	25
§ 3. Quelques mots sur l'ouvrage	26
§ 4. Rosencrantz et Guildenstern	27
<i>Exercice</i>	28
 Partie I : Introduction heuristique	 29
1 Probabilités (heuristique)	31
1.1 Le langage de l'aléatoire	31
§ 5. Phénomènes aléatoires	31
§ 6. L'univers Ω et les réalisations possibles du hasard	33
§ 7. Événements	35
§ 8. Compter/mesurer	35
§ 9. Langage ensembliste	37
§ 10. Calcul des probabilités	38
1.2 Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable	39
§ 11. Univers fini	39
§ 12. Probabilités sur un ensemble dénombrable	42
1.3 Probabilités sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$	42
§ 13. Un univers non dénombrable	42
§ 14. Unions dénombrables d'événements	44
§ 15. Unions non dénombrables d'événements	45
§ 16. Probabilité sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}}$	45
1.4 Probabilités conditionnelles	45
§ 17. Un exemple simple	45
§ 18. Second exemple	46
§ 19. Formule des probabilités totales	47
§ 20. Formule des probabilités composées	48
§ 21. Indépendance stochastique	48
§ 22. « Indépendance = produit » (*)	49
<i>Exercices</i>	50
 2 Variables aléatoires (heuristique)	 57
2.1 Variables réelles	58
§ 23. Première définition	58
§ 24. Probabilité image (ou loi)	59
§ 25. Fonction de répartition	60
§ 26. Extension de la notion de variables aléatoires	62
§ 27. Variables discrètes	63
§ 28. Variables à densité	64

§ 29. Est-ce tout ?	66
§ 30. La connaissance de Ω est inutile	67
2.2 La notion d'espérance	67
§ 31. Points de vue du théoricien, point de vue de l'expérimentateur	67
§ 32. Le problème de la sommation	69
2.3 Espérance d'une variable discrète ou à densité	70
§ 33. Cas discret : première (tentative de) définition	70
§ 34. Deux expériences numériques	70
§ 35. Séries commutativement convergentes	72
§ 36. Seconde définition	73
§ 37. Espérance d'une variable à densité	74
<i>Exercices</i>	74

Partie II : Théorie et Pratique 77

3	Espaces probabilisés	79
3.1	Parties, algèbres, tribus	80
	§ 38. Unions disjointes	80
	§ 39. Algèbres	80
	§ 40. Tribus	81
	§ 41. Borne supérieure et borne inférieure	81
	§ 42. Autres propriétés des tribus	82
	§ 43. Construire une tribu. Tribu engendrée par un ensemble de parties	83
3.2	Espaces probabilisés	84
	§ 44. Espaces probabilisables	84
	§ 45. Espaces probabilisés	86
	§ 46. Propriétés des mesures de probabilités	87
	§ 47. Événements négligeables	89
	§ 48. Espaces probabilisés complets (*)	90
	§ 49. Systèmes complets, quasi-complets d'événements	90
	§ 50. Formule du crible (ou : de Poincaré)	91
3.3	Probabilité sur $\mathbb{R}$	93
	§ 51. Fonction de répartition d'une probabilité	93
	§ 52. La mesure de Lebesgue sur $[0; 1]$	94
	§ 53. Probabilités finies	95
	§ 54. Probabilités discrètes	95
	§ 55. Probabilités à densité	96
3.4	Annexe : π -systèmes et théorème de Carathéodory	96
	§ 56. π -systèmes	96
	§ 57. Le théorème de Carathéodory	97
3.5	Annexe : un ensemble non mesurable	97
	<i>Exercices</i>	98
4	Conditionnement	103
	§ 58. Probabilités conditionnelles	103
	§ 59. Formule des probabilités composées	105
	§ 60. Formule des probabilités totales	105
	§ 61. Théorème de Bayes	106
	§ 62. Quelques remarques et difficultés	108
	<i>Exercices</i>	110

5	Indépendance (1/2)	113
5.1	Indépendance d'événements et de tribus	113
	§ 63. Indépendance de deux événements	113
	§ 64. Indépendance mutuelle	114
5.2	Les lemmes de Borel-Cantelli	116
	§ 65. Limite supérieure et limite inférieure	116
	§ 66. Les lemmes de Borel-Cantelli	119
5.3	Application : du jeu de recouvrement au paradoxe d'Olbers	121
	§ 67. Le paradoxe historique d'Olbers	121
	§ 68. Un modèle bidimensionnel de recouvrement	122
	§ 69. Modèle stellaire uniforme : probabilité que le cercle...	123
	<i>Exercices</i>	125
6	Variables aléatoires discrètes	129
6.1	Variables aléatoires discrètes	129
	§ 70. Variable simple, variable discrète	129
	§ 71. Système complet induit par une variable aléatoire discrète	130
	§ 72. Loi d'une variable aléatoire discrète	131
	§ 73. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	132
	§ 74. Diagrammes en bâtons	133
	§ 75. Variables aléatoires au sens large	134
6.2	Lois classiques	135
	§ 76. Loi uniforme	135
	§ 77. Loi de Bernoulli	135
	§ 78. Loi binomiale	136
	§ 79. Loi géométrique	136
	§ 80. Loi de Poisson	138
	§ 81. Tirages avec et sans remise. Loi hypergéométrique	141
	§ 82. Loi de l'image $\varphi(X)$ d'une variable aléatoire	142
	<i>Exercices</i>	143
7	Espérance d'une variable aléatoire discrète	145
7.1	Espérance	145
	§ 83. Espérance	145
	§ 84. Représentations de X comme combinaisons de fonctions indicatrices . . .	147
	§ 85. Espérances infinies	149
	§ 86. Linéarité	150
	§ 87. Application de la linéarité au calcul pratique d'une espérance	151
	§ 88. Autres propriétés de l'espérance	152
	§ 89. Une formule alternative de l'espérance (*)	153
	§ 90. Intégration terme à terme	154
7.2	Moments	155
	§ 91. Formule de transfert	155
	§ 92. Moments	155
	§ 93. Moments centrés	155
	§ 94. Variance, écart-type	156
	§ 95. Propriétés de la variance	159
	§ 96. Variable centrée réduite	159
	§ 97. Inégalité de Cauchy-Schwarz	159
	§ 98. Espérance et variance des lois classiques	160
	§ 99. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	160

§ 100. Atouts et faiblesses de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	162
7.3 Fonctions génératrices	163
§ 101. Fonction génératrice	163
§ 102. Récupération des moments	164
§ 103. Fonctions génératrices des lois classiques	165
7.4 Un problème classique : le collectionneur	166
§ 104. Position du problème	166
§ 105. Loi du temps d'attente	167
§ 106. Une majoration de la probabilité de déviation	168
Exercices	169
 8 Couples de variables aléatoires discrètes	 177
§ 107. Position du problème	177
8.1 Loi d'un couple	178
§ 108. Loi conjointe, lois marginales	178
§ 109. Lois conditionnelles	179
§ 110. Somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$	180
§ 111. Théorème de transfert	180
8.2 Indépendance	181
§ 112. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes	181
§ 113. Indépendance mutuelle	182
§ 114. Fonctions de variables indépendantes	183
§ 115. Un exemple : minimum et maximum de variables indépendantes	185
§ 116. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes	185
§ 117. Somme de variables indépendantes — formule de convolution	186
§ 118. Loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli	186
§ 119. Théorèmes de stabilité	187
8.3 Covariance	187
§ 120. Covariance d'un couple discret	187
§ 121. Somme de variables aléatoires	189
§ 122. Coefficient de corrélation	191
§ 123. Invariance par changement d'échelle de $\rho(X, Y)$	191
§ 124. Covariance d'un couple de données statistiques	192
8.4 Espérance conditionnelle (cas discret)	193
§ 125. Lois conditionnelles	193
§ 126. Espérance conditionnelle, première approche	194
§ 127. Espérance conditionnelle, seconde approche	195
8.5 Sommation d'un nombre aléatoire de variables	196
§ 128. Contexte historique et mathématique	196
§ 129. Identités de Wald	197
§ 130. Processus de Galton-Watson	199
§ 131. Probabilité d'extinction	200
§ 132. Évolution de la population	201
Exercices	202
 9 Le jeu de pile ou face	 209
9.1 Formalisation	209
§ 133. Espace probabilisé associé à une partie infinie de <i>pile</i> ou <i>face</i>	209
§ 134. Quelques notations	210
9.2 Étude des motifs	211
§ 135. Longueur moyenne de la deuxième séquence homogène	211

§ 136. Vaut-il mieux parier FPP ou PPF ?	212
§ 137. Occurrence de motifs, événements régénératifs	214
§ 138. Temps d'attente d'un des motifs PPF et FPP	216
§ 139. Temps d'attente du motif PPP	218
9.3 Théorèmes limites	219
§ 140. Une certitude : la moyenne	219
§ 141. Retour à l'équilibre et marches aléatoires	220
9.4 Les nombres normaux existent !	222
§ 142. Une suite de variables de Bernoulli indépendantes est un réel de $[0; 1[$ (et vice-versa)	222
§ 143. Propriétés des fonctions de Rademacher	223
§ 144. Le théorème des nombres normaux de Borel	225
§ 145. Existence de nombres complètement normaux	225
<i>Exercices</i>	227
10 Variables aléatoires à densité	231
§ 146. À propos de l'intégrabilité des fonctions	231
10.1 Variables aléatoires à densité	232
§ 147. Variables continues	232
§ 148. Variables absolument continues, ou à densité	232
§ 149. Propriétés de la densité de probabilité	235
§ 150. Changement d'échelle	235
§ 151. Médiane	236
§ 152. Variables symétriques	237
10.2 Lois classiques	237
§ 153. Loi uniforme	237
§ 154. Loi exponentielle	238
§ 155. Loi normale centrée réduite	239
§ 156. Loi normale	240
§ 157. Loi de Cauchy	242
§ 158. Loi Γ (Gamma)	243
§ 159. Loi γ	243
§ 160. Loi du χ^2	243
§ 161. Loi bêta $B(a, b)$	243
10.3 Changement de variable aléatoire	245
§ 162. Loi de $\varphi(X)$ lorsque φ est injective	245
§ 163. Loi de $\varphi(X)$: cas général	246
§ 164. Simuler une loi à densité	247
<i>Exercices</i>	249
11 Espérance d'une variable aléatoire à densité	253
11.1 Espérance et moments	253
§ 165. Espérance	253
§ 166. Formule de transfert	254
§ 167. Moments	255
§ 168. Moments centrés	255
§ 169. Variance	256
§ 170. Inégalité de Cauchy-Schwarz	257
§ 171. Espérance et variance des lois classiques	257
§ 172. Variables centrées réduites	260
§ 173. Autres caractéristiques numériques d'une variable aléatoire à densité	260

11.2 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	261
§ 174. Inégalité de Markov	261
§ 175. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	261
<i>Exercices</i>	262
12 Couples de variables à densité	265
12.1 Loi d'un couple	265
§ 176. Loi d'un couple, lois marginales	265
§ 177. Couple admettant une densité	266
§ 178. Densités marginales	269
§ 179. Somme de deux variables aléatoires à densité	269
§ 180. Théorème de transfert	271
12.2 Indépendance	271
§ 181. Indépendance de deux variables aléatoires à densité	271
§ 182. Indépendance mutuelle	272
§ 183. Somme de deux variables aléatoires indépendantes	273
§ 184. Somme de lois normales indépendantes	274
§ 185. Un exemple : quotient de deux lois normales	274
§ 186. Maximum et minimum de N variables aléatoires indépendantes	275
§ 187. Espérance du produit de variables indépendantes	276
12.3 Covariance	277
§ 188. Covariance d'un couple à densité	277
§ 189. Coefficient de corrélation	278
12.4 Lois conditionnelles	279
§ 190. Lois conditionnelles	279
§ 191. Exemple de variable conditionnée par une autre	282
§ 192. Un exemple de loi mixte (discret, continu) : temps d'attente du métro	282
§ 193. Espérances conditionnelles	285
<i>Exercices</i>	286
13 Exercices et problèmes	297
<i>Exercices</i>	297
 Partie III : Plus formellement...	 315
14 Variables aléatoires : cas général	317
14.1 Mesurabilité	317
§ 194. Définition d'une variable aléatoire	317
§ 195. Calcul des images réciproques	318
§ 196. Quelques résultats sur la mesurabilité	318
14.2 Fonction de répartition	320
§ 197. Loi d'une variable aléatoire	320
§ 198. Fonction de répartition	320
§ 199. Variables discrètes, continues, mixtes	322
§ 200. Décomposition de Lebesgue d'une fonction de répartition	323
§ 201. Densité au sens des distributions	325
§ 202. Une définition de l'espérance n'utilisant que la fonction de répartition	326
§ 203. L'espérance et les notations de l'intégrale de Stieltjes	327
14.3 Limite simple de variables aléatoires	328
<i>Exercices</i>	330

15 L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité	333
15.1 Construction de l'espérance comme intégrale	334
§ 204. Espérance d'une variable aléatoire simple	334
§ 205. Espérance d'une variable aléatoire positive	335
§ 206. Espérance comme limite croissante d'une suite de variables simples (*)	335
§ 207. Espérance d'une variable aléatoire réelle	336
§ 208. Espérance d'une variable aléatoire complexe	337
§ 209. Propriétés de l'espérance ; espace $\mathcal{L}^1$	337
§ 210. Intégration sur une partie	339
§ 211. Espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1	339
§ 212. Moments d'ordre supérieur	340
15.2 Théorèmes de convergence	341
§ 213. Théorème de convergence monotone	341
§ 214. Lemme de Fatou (*)	341
§ 215. Théorème de convergence dominée	342
§ 216. La Cavalerie Légère à l'œuvre	343
15.3 Le théorème de transfert et ses applications	344
§ 217. Le théorème général	344
§ 218. Cas des variables à densité	345
15.4 Espace L^2 ; interprétations géométriques	347
§ 219. Espaces $\mathcal{L}^2$ et L^2	347
§ 220. Inégalité de Cauchy-Schwarz	347
§ 221. Covariance	348
§ 222. Structure de l'espace L^2	349
§ 223. Interprétations géométriques	350
§ 224. Meilleur estimateur quadratique d'une variable aléatoire	351
15.5 Inégalités	352
§ 225. Inégalité de Markov	352
§ 226. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev	353
§ 227. Inégalité de Bernstein	354
§ 228. Inégalité de Jensen (convexité)	354
15.6 Annexe : le théorème de convergence monotone	355
<i>Exercices</i>	355
16 Vecteurs aléatoires	357
§ 229. Notations	357
16.1 Probabilités sur $\mathbb{R}^n$	358
§ 230. Boréliens de $\mathbb{R}^n$	358
§ 231. Probabilité produit	358
§ 232. Densités	358
16.2 Vecteurs aléatoires	358
§ 233. Espérance	359
§ 234. Matrice de covariance	359
§ 235. Inégalité de Cauchy-Schwarz	360
16.3 Fubini !!!	361
§ 236. Le théorème de Fubini en pratique	361
§ 237. Application : densités marginales	361
§ 238. Application : expression alternative de l'espérance	362
16.4 Changements de variables aléatoires	363
§ 239. Changement de vecteur aléatoire	363
§ 240. Somme, produit et quotient de deux variables aléatoires	364

<i>Exercices</i>	365
17 Indépendance (2/2)	367
17.1 Indépendance de variables aléatoires	367
§ 241. Indépendance de deux variables aléatoires	367
§ 242. Indépendance de classes et de tribus d'événements	369
§ 243. Indépendance de n variables aléatoires	370
§ 244. Caractérisations de l'indépendance de variables aléatoires	370
§ 245. Coalitions	370
§ 246. Indépendance de variables aléatoires discrètes	371
§ 247. Indépendance de variables aléatoires à densité	371
17.2 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	372
§ 248. Espérance d'un produit	372
§ 249. Formule de convolution	374
§ 250. Formule de convolution pour les variables à densité	375
§ 251. Somme de n variables aléatoires indépendantes	376
17.3 Temps d'arrêt et identité de Wald	376
§ 252. Notion de temps d'arrêt	376
§ 253. Temps d'arrêt et identités de Wald	377
<i>Exercices</i>	379
18 Fonctions caractéristiques	383
§ 254. Variables aléatoires complexes	383
§ 255. Fonction caractéristique	384
§ 256. Cas des variables aléatoires discrètes	385
§ 257. Propriétés de la fonction caractéristique	385
§ 258. Fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes	386
§ 259. Théorème d'unicité	386
§ 260. Fonction caractéristique et indépendance	387
§ 261. Régularité de la fonction caractéristique	387
§ 262. Fonctions caractéristiques usuelles	388
§ 263. Le théorème de continuité de Paul Lévy	388
<i>Exercices</i>	389
19 Vecteurs gaussiens	391
19.1 Lois normales sur $\mathbb{R}^2$	391
§ 264. Lois normales et extension	391
§ 265. Lois normales sur $\mathbb{R}^2$: cas non dégénéré	392
§ 266. Réduction d'une loi normale non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$	394
19.2 Aspects numériques de lois normales sur $\mathbb{R}^2$	396
§ 267. Lois marginales	396
§ 268. Combinaisons linéaires de X et Y	397
§ 269. Densités conditionnelles	398
§ 270. Ellipses d'égale densité	398
19.3 Vecteurs gaussiens	400
§ 271. Définition des vecteurs gaussiens	400
§ 272. Caractérisation par les combinaisons linéaires	400
§ 273. Indépendance et décorrélation	401
§ 274. Décomposition d'un vecteur gaussien	401
§ 275. Densité d'un vecteur gaussien	403
§ 276. Ellipsoïdes d'égale densité et loi du χ^2	404

§ 277. Lemme des moments (théorème de Wick)	404
<i>Exercices</i>	405

Partie IV : Théorèmes limites 407

20 Convergence	409
§ 278. Introduction aux théorèmes limites	409
20.1 Convergence presque sûre, convergence en probabilité	412
§ 279. Convergence presque sûre	412
§ 280. Critères de convergence presque sûre (*)	412
§ 281. Convergence en probabilité	414
§ 282. Une caractérisation par l'espérance	415
§ 283. Convergence et images de variables aléatoires	416
§ 284. Comparaison entre convergence en probabilité et convergence p.s.	416
§ 285. Une distance sur l'espace des variables aléatoires (*)	417
20.2 Convergence en moyenne et dans L^p	418
§ 286. Convergence en moyenne et dans L^p	418
§ 287. Convergence en probabilité et convergence dans L^p (*)	419
20.3 Convergence en loi	419
§ 288. Convergence en loi	419
§ 289. Convergence en loi <i>versus</i> convergence étroite	421
§ 290. Convergence en loi et convergence en probabilité	422
§ 291. Convergence en loi de variables discrètes	423
§ 292. Convergence en loi de variables à densité	426
§ 293. Convergence en loi et fonctions caractéristiques	427
§ 294. Convergence en loi vers une constante	428
§ 295. Convergence en loi d'un couple, théorème de Slutsky	428
20.4 Une application : produit scalaire de vecteurs unitaires aléatoires	429
§ 296. Vecteur aléatoire sur la sphère S_n	429
§ 297. Loi du produit scalaire	430
§ 298. Loi limite	431
20.5 Seconde application : suites équidistribuées	431
§ 299. Suites équidistribuées	431
§ 300. Critère de Weyl	432
§ 301. Application aux suites $(n\alpha \bmod 1)$	434
20.6 Annexe : convergence étroite	436
§ 302. Théorème de représentation de Skorokhod	436
§ 303. Équivalence de la convergence en loi et de la convergence étroite	437
20.7 Résumé synoptique	438
<i>Exercices</i>	439
21 Loi des grands nombres	445
21.1 La loi du tout ou rien	445
§ 304. Événements de queue, tribu asymptotique	445
§ 305. Loi du 0–1 de Kolmogorov	447
§ 306. Loi du tout ou rien pour les événements	448
§ 307. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage (*)	448
§ 308. Une application aux séries aléatoires	449
§ 309. Une application aux marches aléatoires	449
21.2 Lois des grands nombres	451

§ 310. La loi faible des grands nombres	452
§ 311. La loi forte des grands nombres	453
§ 312. Cas de la divergence (*)	455
21.3 Théorème de Glivenko-Cantelli	456
§ 313. Fonction de répartition empirique	456
§ 314. Application : le test de Kolmogorov-Smirnov	458
21.4 Annexe : deux démonstrations de la loi des grands nombres	460
§ 315. La loi forte selon Etemadi	460
§ 316. La loi forte selon Pratelli	463
<i>Exercices</i>	466
22 Le théorème central limite	471
§ 317. Au-delà de la loi des grands nombres	471
§ 318. Le théorème central limite	472
§ 319. Autres formes du théorème central limite (*)	474
§ 320. Forme locale du théorème central limite	475
§ 321. Évaluation de la vitesse de convergence	476
§ 322. Extension aux variables vectorielles (*)	477
§ 323. Utilité du théorème central limite	477
§ 324. La physique et la loi du $1/\sqrt{n}$	477
§ 325. Au-delà du théorème central limite : la loi du logarithme itéré	478
<i>Exercices</i>	480
23 Techniques d'approximation	481
23.1 Approximations poissonniennes	481
§ 326. Convergence vers une loi de Poisson	481
§ 327. Approximation poissonnienne d'une loi binomiale	482
23.2 Approximation normale	483
§ 328. Approximation normale d'une loi binomiale ; correction de continuité	483
§ 329. Approximation normale d'une loi de Poisson	485
§ 330. Approximation normale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev	486
§ 331. Estimer un nombre de lancers nécessaires	487
§ 332. Résumé des conditions d'approximation	490
23.3 Régression linéaire	490
§ 333. Droite de régression	490
§ 334. Droite de régression par rapport à y	491
§ 335. Corrélation et causalité	492
23.4 Estimation	494
§ 336. Un exemple : moyenne empirique	494
§ 337. Un exemple : variance empirique	494
§ 338. Notion d'estimateur	496
§ 339. Risque quadratique	496
§ 340. Intervalles de confiance	497
<i>Exercices</i>	498
24 Espérance conditionnelle	503
24.1 Le cas fini ou dénombrable	503
§ 341. Espérance conditionnelle sachant une partition	504
§ 342. Un autre point de vue	505
§ 343. La propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle	506
§ 344. Propriétés élémentaires	506

§ 345. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire discrète	508
§ 346. Fonctions mesurables selon une partition dénombrable	509
24.2 Le cas général	510
§ 347. Espérance d'une variable aléatoire sachant un événement	510
§ 348. Espérance conditionnelle sachant une tribu	510
§ 349. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire	512
§ 350. Lemme de factorisation	512
§ 351. Propriétés de l'espérance conditionnelle	512
§ 352. Théorèmes de convergence	513
§ 353. Densités conditionnelles (*)	514
§ 354. Le point de vue hilbertien : l'espérance conditionnelle comme projection	514
24.3 Martingales	516
§ 355. Ma première martingale	516
§ 356. Filtrations, martingales	516
§ 357. Sur- et sous-martingales	518
§ 358. Théorème de convergence des martingales	518
§ 359. Applications	521
24.4 Annexe : probabilités conditionnelles (*)	521
§ 360. Probabilité conditionnelle sachant une partition dénombrable	521
§ 361. Probabilité conditionnelle sachant une variable aléatoire	522
§ 362. Probabilité conditionnelle sachant une tribu	522
<i>Exercices</i>	523

Partie V : Quelques applications 527

25 Quelques résultats établis par la théorie des probabilités	529
§ 363. La formule de Bernstein	529
§ 364. L'existence de nombres complètement normaux	532
§ 365. Points singuliers du cercle de convergence d'une série entière	533
§ 366. Le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein	535
§ 367. En guise de conclusion	539
<i>Exercices</i>	540
26 Simuler informatiquement une loi de probabilité	545
26.1 Simuler une loi discrète	545
§ 368. Simuler une loi de Bernoulli	546
§ 369. Simuler une loi binomiale	546
§ 370. Simuler une loi discrète finie	546
§ 371. Simuler une loi géométrique	547
§ 372. Simuler une loi de Poisson	548
26.2 Simuler une loi continue	549
§ 373. Méthode de l'inverse	549
§ 374. Méthode du rejet	550
§ 375. Mélange de fonctions de répartition	552
26.3 Simuler une loi normale	554
§ 376. Méthode découlant du théorème central limite	554
§ 377. Méthode de la transformée inverse	554
§ 378. Méthode de Box-Muller	554
§ 379. Simulation d'une loi normale par la méthode du rejet	556
§ 380. Simulation d'un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^2$	557

26.4	Remarques sur les générateurs d'une loi uniforme	559
§ 381.	Remarques préliminaires	559
§ 382.	Générateur à récurrence linéaire	561
§ 383.	Récurrences d'ordre supérieur, ou non linéaires	562
§ 384.	Brève remarque historique	563
<i>Exercices</i>		564
27	Méthodes de Monte-Carlo	567
27.1	Estimation d'une moyenne	568
§ 385.	L'aiguille de Buffon	568
27.2	Intégration numérique	570
§ 386.	Position du problème	570
§ 387.	Convergence de la méthode	573
§ 388.	Effet de la dimension	573
27.3	Laissons faire le hasard !	574
§ 389.	Un exemple arithmétique : tests de primalité (Miller-Rabin)	574
§ 390.	Une machine à deviner des conjectures : le modèle de Cramér	578
§ 391.	Le hasard et les algorithmes de recherche de solution optimale	579
§ 392.	Falsification de données comptables et la loi de Benford	580
<i>Exercices</i>		583
28	Chaînes de Markov	585
28.1	Matrices de transition	585
§ 393.	Matrices de transition, chaînes de Markov	586
§ 394.	Mise en garde : probabilités conditionnelles et mémoire du passé	588
§ 395.	Graphe associé à une chaîne de Markov	588
§ 396.	Propriétés des matrices stochastiques	589
§ 397.	Mesures sur l'espace des états	589
§ 398.	Évolution à n pas et équation de Chapman-Kolmogorov	590
§ 399.	Évolution du système aux grandes échelles de temps	591
28.2	Classification immédiate des états	593
§ 400.	États communicants	593
§ 401.	Notion de classes. Graphes et matrices irréductibles.	595
§ 402.	Parties fermées. États absorbants	596
§ 403.	Périodicité	597
§ 404.	Ergodicité (irréductibilité forte)	598
§ 405.	Théorème de Perron-Frobenius et théorème ergodique	599
28.3	Classification asymptotiques des états	601
§ 406.	États transitoires, états récurrents	601
§ 407.	Matrice réduite	602
28.4	Méthode « un pas en avant »	603
§ 408.	Temps moyen de retour	603
§ 409.	Temps moyen d'atteinte d'une partie	604
§ 410.	Temps de retour et loi stationnaire	604
§ 411.	Probabilité d'absorption	605
28.5	Trois exemples	606
§ 412.	Attente d'un motif dans le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	606
§ 413.	Une chaîne réductible	607
§ 414.	Le modèle des urnes d'Ehrenfest	608
<i>Exercices</i>		609

29 Arithmétique et probabilités : une randonnée	613
29.1 Exemple élémentaire	614
29.2 Le théorème d'Erdős-Kac et la loi normale	615
29.3 Écarts entre nombres premiers et lois de Poisson	617
29.4 Valeurs propres de matrices aléatoires	619
30 Bosons, fermions et boltzmannions	623
30.1 Le facteur de Boltzmann	623
§ 415. Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques	623
§ 416. « Nombre de complexions » d'un état	625
§ 417. Un exemple (très) élémentaire	626
§ 418. Le facteur de Boltzmann	627
30.2 Statistiques quantiques	630
§ 419. L'entropie et le paradoxe de Gibbs	630
§ 420. Fermions et bosons	632
§ 421. Nombre d'états occupés	634
31 Processus de Poisson	637
§ 422. Introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$? . . .	637
§ 423. Processus de comptage	638
§ 424. Processus de Poisson	638
§ 425. Caractérisation des processus de Poisson	639
§ 426. Processus marqués	640
§ 427. Distribution des instants d'arrivée	641
§ 428. Effet physique : le bruit de grenaille	641
§ 429. Âge et temps de vie résiduel	641
§ 430. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$	642
§ 431. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$	643
<i>Exercices</i>	643
32 Mouvements browniens	645
32.1 Une approche heuristique	645
§ 432. L'observation de Robert Brown	645
§ 433. Marche aléatoire discrète et passage à la limite continue	646
§ 434. Limite continue — première approche	647
§ 435. Limite continue — seconde approche	648
§ 436. Une propriété du noyau de la chaleur	650
§ 437. Limite continue d'une marche aléatoire asymétrique	651
§ 438. Marche aléatoire en dimension supérieure	651
§ 439. Temps moyen de visite	652
§ 440. Dernières remarques	653
32.2 Modélisation probabiliste	654
§ 441. Définition	655
§ 442. La loi du mouvement brownien est la loi limite de marches aléatoires . .	656
§ 443. Loi du mouvement brownien ; mesure de Wiener	657
§ 444. Construction canonique du mouvement brownien	658
§ 445. Covariance	659
32.3 Propriétés des chemins browniens	660
§ 446. Invariances	660
§ 447. Propriétés de régularité	660
§ 448. Récurrence : le théorème de Pólya	661

§ 449. Autres propriétés (*)	661
§ 450. Construction de Lévy-Ciesielski du mouvement brownien	662
32.4 Mouvement brownien, physique et potentiels	664
§ 451. Le modèle d'Einstein et la détermination de la constante d'Avogadro	664
§ 452. Problème de Dirichlet et méthode de Monte-Carlo	664
§ 453. Mouvement brownien et potentiel capacitif	667
§ 454. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 1$)	667
§ 455. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 2$)	668
§ 456. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d \geq 3$)	669
32.5 Annexes	671
§ 457. Détermination du noyau de la chaleur	671
§ 458. Démonstration du théorème de Paley-Wiener-Zygmund	671
Exercices	673
 33 Estimation bayésienne	 677
§ 459. Distribution <i>a priori</i> uniforme, et distribution <i>a posteriori</i>	677
§ 460. Choix d'une autre distribution <i>a priori</i>	680
Exercices	680
 34 Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires	 681
34.1 L'iniquité flagrante d'un jeu équitable	681
§ 461. La loi de l'Arc sinus	681
34.2 Séries harmoniques de signe aléatoire	683
§ 462. Cas d'une pièce déséquilibrée	684
§ 463. Cas équilibré	684
34.3 Rayon d'une série entière aléatoire	686
§ 464. Le rayon est presque sûrement constant	686
§ 465. Trois rayons sont possibles	686
Exercices	688
 35 À propos de quelques paradoxes	 691
35.1 Biais d'équiprobabilité	691
§ 466. Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes	691
§ 467. Le problème de Monty Hall	692
§ 468. Retour au problème des deux cassettes	693
35.2 Problèmes dus à l'interprétation de l'espérance	694
§ 469. L'espérance d'un jeu n'est pas un critère suffisant	694
§ 470. Paradoxe de Saint-Pétersbourg	694
35.3 Pseudo-paradoxes	697
§ 471. Le paradoxe de Walter Penney	697
Exercices	698

Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre	703
A.1 Suites	703
A 1. Fini, dénombrable, indénombrable	703
A 2. Limite supérieure, limite inférieure	704
A 3. Suites de Cauchy	704
A 4. Comparaison de suites	705
A 5. Formule de Stirling	705
A.2 Séries numériques	705

A 6. Définitions	705
A 7. Séries positives	705
A 8. Théorème de comparaison de séries positives	706
A 9. Produits infinis	706
A 10. Convergence absolue	706
A 11. Exponentielle complexe	706
A 12. Changement d'ordre de sommation	707
A 13. Familles sommables positives	708
A 14. Familles sommables de signes quelconques	708
A 15. Théorème de Fubini pour les séries doubles	708
A 16. Sommation par paquets	710
A 17. Théorème de convergence dominée discrète	710
A.3 Fonctions	710
A 18. Continuité, continuité à droite	710
A 19. Fonctions à variation bornée	711
A 20. Fonctions absolument continues	711
A 21. Fonction Γ d'Euler	711
A 22. Fonction d'erreur, fonction de survie de la loi normale	711
A.4 Fonctions croissantes	712
A 23. Continuité, continuité à gauche, à droite	712
A 24. Discontinuités de 1 ^{re} et 2 ^e espèce.	712
A 25. Sauts de discontinuité d'une fonction croissante	713
A 26. Régularité d'une fonction croissante	713
A 27. Décomposition de Lebesgue	713
A 28. Une fonction singulière : la fonction de Cantor	714
A 29. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition	715
A.5 Fonctions convexes	716
A 30. Fonctions convexes, strictement convexe, concaves	716
A 31. Caractérisation par la pente	717
A 32. Caractérisation par la dérivée	717
A 33. Cordes, tangentes et demi-tangentes	717
A 34. Inégalités de Jensen	718
A.6 Modes de convergence de suites et séries de fonctions	718
A 35. Convergence simple et convergence uniforme	718
A 36. Théorèmes de Weierstrass	719
A 37. Séries de fonctions	719
A.7 Séries entières	719
A 38. Rayon	719
A 39. Fonctions définies par une série entière	720
A 40. Lemme radial d'Abel	720
A 41. Produit de Cauchy de deux séries entières	720
A 42. Quelques sommes	721
A.8 Calcul intégral	721
A 43. Théorème de Fubini	721
A 44. Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$	722
A 45. Produit de convolution	722
A 46. Quelques intégrales utiles	723
A 47. Méthode des multiplicateurs de Lagrange	723
A.9 Espaces de Hilbert	723
A 48. Espaces préhilbertiens	723
A 49. Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes	724
A 50. Théorème de projection orthogonale	725
A.10 Transformée de Fourier	725
A 51. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable	725
A 52. Distributions. Distributions tempérées	725
A 53. Transformée de Fourier d'une distribution	726
A.11 Dénombrement	726
A 54. Coefficients binomiaux	726
A 55. Formulaire pour les coefficients binomiaux	727

A 56. Nombres de Stirling	727
A.12 Topologie élémentaire	729
A 57. Ouverts, fermés	729
A 58. Espaces complets	729
A.13 Réduction, théorème spectral	729
A 59. Adjoint	729
A 60. Théorème spectral	730
A 61. Matrices symétriques positives, définies positives	730
A.14 Matrices positives	730
A 62. Rayon spectral	730
A 63. Matrices à coefficients positifs	730
A 64. Matrices irréductibles, matrices ergodiques	731
Exercices	732
B Davantage sur la mesure	733
B.1 Boréliens	733
A 65. Boréliens de $\mathbb{R}$	733
A 66. Boréliens de $\mathbb{R}^n$	735
A 67. Boréliens de $\mathbb{R}^\infty$	735
A 68. Tribus produits, espaces produits	735
B.2 Fonctions mesurables	736
A 69. Définition et premières propriétés	736
A 70. Tribu engendrée par une variable aléatoire	737
B.3 Un complément au jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	738
A 71. Additivité dénombrable de $\mathbf{P}_0$ sur la classe $\mathfrak{C}$ des cylindres (*)	738
B.4 Le lemme de classe monotone	739
A 72. π -systèmes et classes monotones	739
A 73. Première application : le lemme des coalitions	741
A 74. Deuxième application : rôle central de la fonction de répartition	742
A 75. Le théorème d'extension de Carathéodory	743
B.5 Le théorème de Radon-Nikodým	743
A 76. Mesure absolument continue par rapport à une autre	743
A 77. Le théorème de Radon-Nikodým	743
Exercices	744
C Théorèmes d'existence	747
C.1 Quelques exemples simples de théorèmes d'existence	747
A 78. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée	747
A 79. Un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes	748
A 80. Une suite de variables uniformes indépendantes	749
A 81. Une suite de variables indépendantes de lois quelconques données	750
C.2 Le théorème fondamental de Kolmogorov	750
A 82. Conditions de compatibilité et théorème d'extension	750
D Lexique français-anglais	753
Références	755
Index	759

Notations

Abréviations	
CNS	condition nécessaire et suffisante
p.s.	presque sûre, presque sûrement
p.p.	presque partout
i.s.	infinitement souvent
Ensembles	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des entiers premiers $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
$\mathfrak{P}(\Omega)$	ensemble des parties de Ω
$A \cap B$	intersection de A et B
$A \cup B$	réunion de A et B
$A + B$ ou $A \sqcup B$	réunion disjointe de A et B ($A \cap B = \emptyset$, $A + B := A \cup B$)
$\sum A_n$ ou $\bigsqcup A_n$	réunion disjointe
$A \setminus B$	$= A \cap B^c$
$A - B$	$= A \setminus B$, étant entendu que $B \subset A$
A^c	complémentaire de A (dans Ω)
$A_n \uparrow A$, $A = \lim \uparrow A_n$	limite croissante
$A_n \downarrow A$, $A = \lim \downarrow A_n$	limite décroissante
$A^* = \limsup A_n$	
$A_* = \liminf A_n$	
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices carrées d'ordre n
$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	ensemble des vecteurs colonnes d'ordre n
$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$	ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$
Fonctions	
$f(x^+)$, $f(x+0)$	limite à droite $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$
$f(x^-)$, $f(x-0)$	limite à gauche $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$
$f(+\infty)$	limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
$f(-\infty)$	limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
$f \otimes g$	produit tensoriel $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$
$f * g$	produit de convolution

Lettres gothiques															
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Probabilités		
Ω	univers, espace des épreuves	
$\mathfrak{T}, \mathfrak{F}, \mathfrak{A}$	tribus (« T » et « F » gothiques) ou algèbres (« A »)	
ω	réalisation du hasard (élément de Ω)	
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	probabilités	
$X, Y, Z, T, \dots$	variables aléatoires	
$\mathbf{Cov}(X, Y)$	covariance du couple (X, Y)	
$\mathbf{E}(X), \mathbf{E}X$	espérance de la variable X	
$\mathbf{P}(A), \mathbf{P}\{X \in B\}$	probabilité	
$\mathbf{V}(X)$	variance de la variable X	
σ_X	écart-type de X	
$\mathfrak{N}(x)$	fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$	§ 156
$n(x)$	densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$	§ 155
$\{X \in A\}$	événement lié à une variable aléatoire	
$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$	probabilité produit	§ 231
$f \otimes g$	produit direct, ou tensoriel $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$	§ 22, § 181
$X \wedge Y, X \wedge m$	$\min(X, Y), \min(X, m)$	
X'	variable centrée $X' = X - \mathbf{E}(X)$	
X^*	variable centrée réduite $X^* = (X - \mathbf{E}X)/\sigma_X$	
X^+	$\max(X, 0)$	§ 207
X^-	$\max(-X, 0)$	§ 207
$X_n \xrightarrow{\text{ps}} X$	convergence presque sûre	§ 279
$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$	convergence en proba	§ 281
$X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$	convergence en loi (convergence étroite)	§ 288
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	convergence dans L^p	§ 286
$X \sim \mathcal{L}$	X suit la loi $\mathcal{L}$	
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p	$p \in [0; 1]$
$\mathcal{B}(n; p)$	loi binomiale de paramètres n et p	$n \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{E}(\alpha)$	loi exponentielle de paramètre α	
$\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$	loi géométrique de paramètre p	
$\mathcal{N}(m; \sigma^2)$	loi normale de moyenne m et de variance σ^2	
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ	
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$	tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^n$	
$\mathfrak{T}, \mathfrak{E}, \dots$	tribus	
$\mathfrak{D}_X$	système complet induit par une variable discrète	
$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$ est plus fine que $\mathfrak{B}$	
$\sigma(X)$	tribu engendrée par X	
$\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$	tribu engendrée par $X_1, X_2, \dots, X_n$	
δ_a	mesure de Dirac en a	
$\Delta(x, y)$	$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s \leq x, t \leq y\}$	§ 176
$\mathcal{L}^0(\Omega)$	espace des variables aléatoires	§ 194
$\mathcal{L}_+^0(\Omega)$	espace des variables aléatoires positives	§ 194
$\mathcal{L}_b^0(\Omega)$	espace des variables aléatoires bornées	§ 194
$\mathcal{L}^1, L^1$	espaces des variables intégrables : $\mathbf{E} X < +\infty$	§ 211
$\mathcal{L}^2, L^2$	espaces des variables de carre intégrables : $\mathbf{E} X ^2 < +\infty$	§ 219
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	matrices de transition	§ 393
$\mathbf{P}(i, j), \mathbf{P}^{(i, j)}$	coefficients de $\mathbf{P}$, de $\mathbf{P}^n$	
π_n	loi instantanée	§ 398
$\mathbf{P}_i$	probabilité conditionnée par $\{X_0 = i\}$	§ 397
$i \rightarrow j, i \leftrightarrow j$	i mène à j , communique avec j	§ 400
$\mathbf{E}_g(\lambda, \mathbf{P})$	sous-espace propre à gauche	§ 399

Introduction

Je considère que la théorie des probabilités n'est pas seulement une branche des mathématiques, et ne se limite pas à une collection harmonieuse d'axiomes et de théorèmes. À mon idée, le calcul des probabilités est un mode de pensée.

Mark KAC, 1961.

§ 1 Les lois du hasard

Les termes qui reviennent le plus souvent dans un ouvrage de probabilité sont, paradoxalement, « loi » et « presque sûrement » — des locutions associées à la certitude plutôt qu'à l'aléatoire.

Les lois du hasard,

quel bel oxymore ! Et pourtant, c'est bien à étudier les lois (prévisibles) du hasard (par nature imprévisible) que Pascal, plusieurs Bernoulli, Tchebychev, Kolmogorov et autres grands mathématiciens se sont attachés. Que des certitudes puissent apparaître est sans doute un phénomène connu depuis longtemps : au cours d'un grand nombre de tirages, une pièce équilibrée doit mener au résultat *pile* avec une fréquence proche de $1/2$, et même d'autant plus proche que le nombre de tirages est grand. C'est presque une tautologie — si l'on observe une fréquence limite qui n'est pas $1/2$, on dira tout simplement que la pièce n'est pas équilibrée. Mais ce n'en est pas une : l'intérêt de la mathématisation du problème est de montrer que la fréquence observée admet *effectivement* une limite. Ce théorème, appelé *loi des grands nombres*, fut une révolution en soi : de qualitatif, l'étude du comportement du hasard est devenu quantitatif, et permet donc de prédire des nouveaux phénomènes.

Voici un exemple graphique, plus élaboré mais frappant : ci-dessous, à gauche, une représentation d'une matrice carrée A , dont les coefficients ont été tirés « au hasard » dans l'intervalle $[-1; 1]$. Chaque valeur de gris correspond à une valeur réelle (-1 pour noir, 1 pour blanc). Maintenant, inversons cette matrice⁽¹⁾ et ob-

(1). Elle est sans doute inversible, comme doivent l'être la plupart des matrices dont les

servons, à droite, le résultat (le noir correspond maintenant à la valeur du plus petit coefficient, le blanc à celle du plus grand).

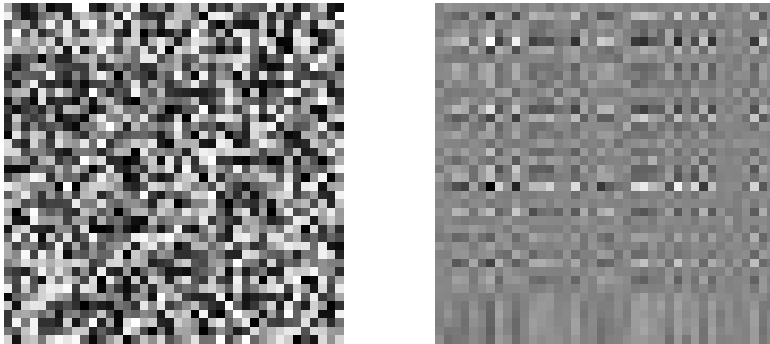


FIGURE 0.1 — À gauche : Une matrice carrée aléatoire à coefficients dans $[-1; 1]$. À droite : L 'inverse de cette matrice.

Que s'est-il passé ? L'aspect « nettement aléatoire » de la première figure a disparu, remplacé par une sorte de motif écossais délavé. Un ordre a surgi du hasard !

But de la théorie

On dit parfois en manière de plaisanterie que *le but de la théorie des probabilités est de calculer des probabilités*.

Cette galéjade cache un réel malaise : la notion de probabilité telle qu'étudiée par un mathématicien est sans aucun doute très éloignée de la notion qu'en auront un physicien, un philosophe, ou le fameux homme de la rue (quand il n'est pas philosophe ou mathématicien). La notion elle-même est suffisamment fuyante pour qu'il soit confortable de se cacher derrière les formules et les techniques de calcul et éluder la question de la signification, en la laissant à d'autres.

- La première interprétation, et la plus fréquente, est statistique, et résumée par la formule « nombre de cas favorables sur nombre total de cas ». Mais très rapidement, on en vient à manipuler des nombres infinis et un appareillage mathématique plus sophistiqué est requis. On doit alors faire un saut conceptuel et construire, en confiance, un *modèle*, dont on espère qu'il décrira le monde avec la précision et les propriétés voulues. Pour tester ce modèle, on peut tenter de répéter une expérience un grand nombre de fois, et calculer une fréquence limite. Plusieurs problèmes se posent alors : que veut dire un grand nombre de fois ? que veut dire répéter une expérience ? La réponse mathématique est de considérer des *suites de variables aléatoires indépendantes*, et d'établir des théorèmes affirmant que, sous certaines conditions, la fréquence limite observée est bien la valeur attendue.
- Il existe d'autres interprétations. Pour certains, les probabilités objectives n'existent pas, il n'existe que des probabilités subjectives, qui mesurent notre degré de confiance en certains événements.
- Enfin, on peut se débarrasser des difficultés conceptuelles en les ignorant tout simplement : on décide de s'abstraire entièrement du contexte historique des probabilités, et de n'envisager la théorie que comme un pro-

coefficients sont des réels choisis « au hasard ». Le lecteur sera invité à réfléchir à ce problème ultérieurement.

longement de la théorie de la mesure et de l'intégration. On peut alors axiomatiser entièrement la théorie, la débarrasser de tous les problèmes d'interprétation, de toute référence à des situations concrètes, et réduire la théorie des probabilités à une branche mathématique aussi pure, aussi nette que les autres. Ce point de vue a un côté stérile. Bien que le véritable essor des probabilités n'ait pu avoir lieu qu'une fois l'axiomatisation correctement faite et une théorie de l'intégration profondément ancrée dans le sol mathématique, il n'en reste pas moins que la motivation à la base des travaux les plus cruciaux se rattache à des situations concrètes : phénomènes physiques ou biologiques, calculs de risques, détermination de stratégies. Quoi que l'on fasse, les probabilités restent une branche unique des mathématiques, avec ses propres méthodes et, surtout, ses propres types de raisonnements⁽²⁾.

Comme à chaque fois que les mathématiciens s'approprient un concept — le hasard n'a appartenu, des siècles durant, qu'au champ de la philosophie, de la métaphysique ou des controverses de comptoir —, les outils mathématiques qu'ils créent deviennent en eux-mêmes un objet d'étude. Une part importante de tout ouvrage de probabilités est consacrée à l'étude des concepts et des méthodes spécifiques au champ d'étude du hasard, qui ont pour noms *variables aléatoires*, *indépendance*, *fonction de répartition*, *espérance*, *convergence presque sûre*, *convergence en loi*, etc.

§ 3 Quelques mots sur l'ouvrage

Aucune connaissance spécifique aux probabilités n'est requise pour aborder l'ouvrage, qui commence par une introduction heuristique aux idées et au langage de l'aléatoire. Cette partie est indépendante du reste de l'ouvrage⁽³⁾.

Les mathématiques nécessaires à la compréhension du texte sont rappelées en annexe⁽⁴⁾.

L'ouvrage est découpé en plusieurs parties :

- La partie I présente, de manière assez informelle, les idées essentielles de la théorie (probabilités conditionnelles, indépendance, variables aléatoires, espérance), ainsi que les problèmes théoriques auxquels on est confronté lorsque l'on manipule des univers infinis.
- La partie II débute par un chapitre assez formel sur les espaces probabilisés. Ce chapitre peut être lu en deux temps : dans un premier temps, seuls les passages balisés par le symbole « ► » peuvent être étudiés. Suivent les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance. Le reste de la partie traite de deux grandes classes de variables aléatoires (discrètes et à densité), et est tourné vers l'étude pratique. Il correspond globalement au niveau des probabilités exigées en début de cycle universitaire, en classes préparatoires ou au CAPES de mathématiques. Un interlude sur le jeu de *pile* ou *face* présente, par anticipation, quelques résultats intéressants.

(2). De nombreux résultats, d'une grande profondeur, ont été établis *avant* (ou *sans*) le cadre axiomatique désormais universellement utilisé. Le lecteur est très vivement incité à lire le merveilleux ouvrage de William FELLER [34], totalement dénué de théorie de la mesure.

(3). Le lecteur pressé d'en découdre avec des définitions plus formelles peut la sauter ; on trouvera des renvois aux exemples importants qui s'y trouvent dans le texte principal.

(4). Pour la partie II, seules la théorie des séries et les rudiments de calcul différentiel et intégral sont nécessaires.

Les parties III et IV font parfois référence à l'intégrale de Lebesgue, sans qu'une connaissance approfondie du sujet soit nécessaire ; notamment, la construction explicite de l'espérance est effectuée sans appel à des connaissances extérieures. Dans cet esprit, nous avons réduit l'importance de l'utilisation des fonctions caractéristiques, sans tout à fait les supprimer.

- La partie III généralise, de manière plus théorique, les résultats de la partie précédente. On y présente la construction générale de l'espérance d'une variable aléatoire, permettant de prouver différentes propriétés admises pour les variables aléatoires à densité, et permettant également de « passer à la limite ». (Deux chapitres peuvent être omis en première lecture : celui sur les fonctions caractéristiques et celui sur les vecteurs gaussiens.) Cette partie est plus du niveau de fin de cycle de licence ou de début de maîtrise, et pourra intéresser également les candidats au concours de l'Agrégation externe.
- La partie IV présente les « théorèmes limites » : après avoir abordé la notion générale de convergence, on étudie les lois de type « zéro-un », les lois des grands nombres et le théorème central limite.
- La partie V présente des applications diverses des probabilités, et les chapitres sont totalement indépendants les uns des autres. Le choix des sujets reflète sans doute davantage les goûts de l'auteur qu'autre chose. Nous conseillons entre autres au lecteur de lire le chapitre sur la simulation informatique d'une loi de probabilités, et de jouer avec un ordinateur...

Nous n'avons pas cherché à *unifier* cette présentation succincte de la vaste théorie des probabilités ; au contraire, nous avons cherché à en *diversifier* les points de vue. Ainsi, certaines notions peuvent être définies jusqu'à trois ou quatre fois, selon le degré de généralité ou d'abstraction cherché, selon le but que l'on recherche⁽⁵⁾, voire selon le public visé⁽⁶⁾. Un désagrément possible pour le lecteur est de devoir lire, parfois, des explications trop détaillées de passages qu'il jugera triviaux, à côté de passages nettement plus difficiles — signalés comme tels par une taille de caractères plus petite, ou par un astérisque (*).

Enfin, dernière chose, mais non des moindres, nous avons essayé d'*illustrer* le texte au maximum ; nous accueillerons avec beaucoup de gratitude toute remarque, suggestion ou proposition d'ajout concernant les figures.

Un *index*, que nous espérons le plus complet possible, permet de s'y retrouver. Les entrées peuvent être multiples (par exemple, la notion de *convergence en loi* peut être recherchée aussi bien à l'entrée *Convergence* qu'à celle de *Loi*).

Le symbole de la main qui écrit « ✎ », dans la marge extérieure du texte, informe le lecteur de l'existence d'un exercice proche de ce qui vient d'être dit, et qui peut être traité sur-le-champ. Les exercices sont regroupés en fin de chapitres, et suivis, la plupart du temps, d'indications et/ou d'une correction détaillée. #0.1

- Les paragraphes du texte principal sont numérotés en continu, de § 1 à § 471.
- Les paragraphes des annexes sont également numérotés en continu, de A 1 à A 82.

Rosencrantz et Guildenstern

Un dernier mot : lors d'expériences (de pensée) mettant en scène deux protagonistes, ceux-ci seront conventionnellement appelés Rosencrantz et Guildenstern, en référence à une pièce de Tom Stoppard, *Rosencrantz and Guildenstern are*

§ 4

(5). Par exemple, une définition abstraite de l'espérance d'une variable aléatoire telle que celle donnée à la page 337 possède un haut degré de généralité. Elle ravira ceux qui y verront un parallèle avec la théorie de l'intégration selon Lebesgue. Mais elle n'est pas effective, au sens où elle ne permet pas de calculer cette espérance de manière simple. Une autre définition, utilisant l'intégrale de Stieltjes, permet d'enrichir ce point de vue.

(6). Bien que les probabilistes usent de préférence de la fonction de répartition — et ils ont bien raison — les physiciens préféreront sans doute utiliser la densité de probabilité, fût-elle définie au sens des distributions — et ils ont raison également.

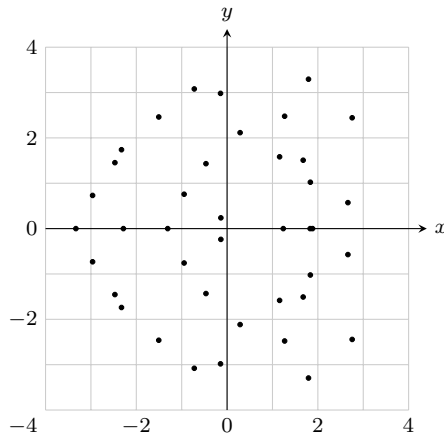
dead [93, 94]. La scène initiale de la pièce représente nos deux héros — personnages mineurs de *Hamlet* — en train de disputer une interminable partie de *pile* ou *face*, dont tous les tirages se soldent par un *face* et le passage d’une pièce de la bourse de Guildenstern à celle de Rosencrantz.

EXERCICE

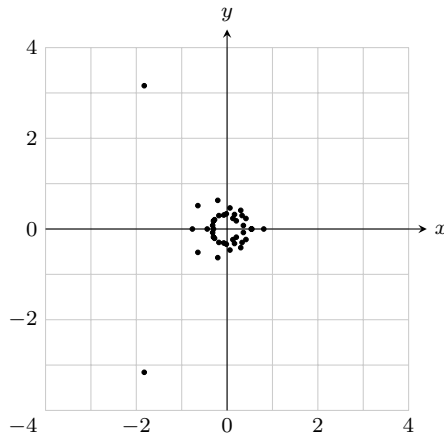
♦ **Exercice 0.1** Expliquer *qualitativement* l’allure de la matrice de droite dans la figure 0.1 : pourquoi ce motif écossais ? Pourquoi la matrice est-elle d’aspect plus terne que la précédente ?

Indications

◇ *Indication 0.1* : La matrice M initiale a de grandes chances d’être diagonalisable (en tant que matrice complexe). Voici son spectre dans le plan complexe.



Que devient le spectre lorsque l’on calcule l’inverse de la matrice ? Et notamment, que deviennent les « petites » valeurs propres ? La figure ci-dessous est représentative...



Enfin, représenter (informatiquement) une matrice « aléatoire » de petit rang (1, 2, 3,...)

Chapitre 1

Probabilités

(approche heuristique)

*Hasard ?
Mets que font les fripons pour les sots qui le mangent.
Point de hasard !*

VICTOR HUGO
Ruy Blas, acte IV, scène VII.

Ce chapitre, ainsi que le suivant, présente un panorama rapide du langage et des concepts les plus importants dans la théorie des probabilités :

- *l'univers des possibles, qui est la collection de toutes les « possibilités de réalisation du hasard » ;*
- *notion d'événement — une partie de l'univers des possibles, dont on va quantifier l'importance, soit par comptage, soit par une mesure plus sophistiquée ;*
- *notion de probabilité conditionnée par un événement, et notion d'indépendance d'événements.*

Des exemples simples sont présentés, ainsi qu'un premier exemple non trivial, permettant de modéliser une succession infinie de tirages à pile ou face — expérience que l'on peut qualifier de fondamentale dans l'approche théorique des probabilités.

1.1 LE LANGAGE DE L'ALÉATOIRE

Phénomènes aléatoires

§ 5

On parle de phénomène aléatoire lorsque, en recommençant une expérience dans des conditions aussi semblables que possible, le résultat de cette expérience est variable et échappe à toute prévision absolue. À ce titre, le jeu de dé est l'archétype même de l'expérience que l'on associe au hasard⁽¹⁾.

⁽¹⁾. Le nom latin du dé, *alea*, a donné le terme « aléatoire ». Le mot arabe *az-zahr*, signifiant « le dé » et passant par l'espagnol *azar*, a lui-même conduit à « hasard ». Quant à la manière

Chapitre 2

Variables aléatoires

(approche heuristique)

Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

*Pierre-Simon, marquis de LAPLACE,
dédicace (à Napoléon) de sa Théorie analytique des probabilités,
1812.*

Pour décrire une quantité X pouvant prendre des valeurs « aléatoires », il suffit de définir une fonction X sur l'ensemble Ω . Ainsi, à chaque « possibilité du hasard » ω , la quantité $X(\omega)$ est déterminée.

Contrairement à ce qui se passe souvent en analyse, ce n'est pas X en tant que fonction qui présente un intérêt. Les notions usuelles de continuité ou de dérivabilité, centrales en analyse, n'ont ici aucun sens, puisque l'on n'a pas défini a priori de notion de « proximité » entre les ω , c'est-à-dire de topologie sur Ω . D'ailleurs, la plupart du temps, Ω est inconnu et on ne se soucie pas de le définir correctement : tel le système d'exploitation de qualité, il travaille en tâche de fond et se fait oublier de l'utilisateur. Pour le probabiliste, ce qui compte est : avec quelle fréquence X prend-elle telle ou telle valeur ? On cherche ainsi à répondre à des questions du type :

- quelle est la probabilité que $X(\omega)$ prenne ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$?*
- quelle est la probabilité que $X(\omega)$ soit égale précisément à 0 ?*
- quelle est la probabilité que $|X(\omega)| > 42$?*
- ou plus généralement, si A est une partie de $\mathbb{R}$, quelle est la probabilité que $X(\omega)$ soit dans A ?*

*On résume l'ensemble de ces questions sous la formule : comment les valeurs prises par X sont-elles distribuées ? La donnée quantitative de cette propriété s'appelle la **loi** (de distribution) de X . Nous verrons — chose remarquable — qu'elle est entièrement déterminée par la réponse à la question : pour chaque réel x , quelle est la probabilité que $X(\omega)$ soit inférieur ou égal à x ?*

Chapitre 3

Espaces probabilisés

Si les mathématiques — système spécialisé de quelques signes, fondé sur l'intelligence et gouverné par elle — impliquent des situations insaisissables, et sont l'objet de permanentes discussions, que dire des obscurités du langage, amas confus de milliers de symboles maniés presque au hasard ?

Jorge Luis BORGES, La jouissance littéraire

Le formalisme désormais employé dans la théorie des probabilités est celui que Kolmogorov introduisit dans ses Méthode analytiques de la théorie des probabilités [61] de 1931, et surtout dans son opuscule Fondements de la théorie des probabilités [62] paru en 1933⁽¹⁾; bien que cette axiomatisation soit aujourd'hui d'un usage bien établi⁽²⁾, elle mit longtemps à s'imposer, et ne fut guère connue avant les années 50.

L'un des grands mérites de Kolmogorov fut d'avoir fourni un cadre entièrement abstrait à la théorie — qui n'est mise en parallèle avec l'expérience commune que dans le cas des probabilités finies —, cadre qui permet la généralisation de quelques notions intuitives et simples à des situations où, a priori, aucun calcul ne semblait possible. Pour cela, il fait en permanence appel à des éléments de théorie des ensembles, et notamment à la notion de tribu (ou σ -algèbre), déjà évoquée au chapitre 1.

Dans ce chapitre, nous passons en revue le vocabulaire nécessaire à la bonne compréhension du reste de l'ouvrage; le lecteur est invité à parcourir, sans forcément s'y attarder en première lecture, les grandes lignes de ce formalisme — mais à s'y reporter chaque fois que le besoin s'en fera ressentir. Les points les plus importants sont signalés, en marge, par un ou deux symboles « ► » ou « ◀ ». Au contraire, certains passages signalés par un astérisque () peuvent être omis en première lecture.*

(1). Ce petit livre est encore très lisible malgré son âge et en dépit de notations surprenantes pour le lecteur d'aujourd'hui, comme $\bigcup_n A_n$ pour l'union, ou $\bigcap_k A_k = A_1 A_2 \cdots A_n$ pour l'intersection. La structure de la présentation a manifestement influencé un nombre incalculable d'ouvrages sur le sujet ! L'influence considérable de Kolmogorov en mathématiques est présentée de manière très agréable dans l'ouvrage de Charpentier, Lesne et Nikolski [16].

(2). Ce qui n'empêche pas d'autres types de présentation; l'excellent ouvrage de Rényi [86] propose une approche alternative des espaces probabilisés, en prenant comme modèle de base les espaces de probabilités conditionnelles, dont les espaces usuels de Kolmogorov ne sont que des cas particuliers.

Chapitre 4

Conditionnement

On a une chance sur dix mille, quand on prend un avion, qu'il y ait une bombe à l'intérieur. Mais on n'a qu'une chance sur cent millions qu'il y en ait deux. Alors, pour plus de sécurité, emportez votre bombe.

Notre intuition des probabilités est souvent basée sur des probabilités conditionnées par un événement (« quelle est la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui sachant qu'on est en novembre » n'obtient pas la même réponse que la même question « sachant qu'on est en juin »). La formalisation d'une probabilité conditionnelle, pour aisée qu'elle soit, permet d'établir les premiers outils de calcul de la trousse de survie du probabiliste (occasionnel ou enragé) :

- formule des probabilités composées ;
- formule des probabilités totales ;
- théorème de Bayes.

Probabilités conditionnelles

§ 58

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Si A est un événement, on souhaite donner un sens à « la probabilité qu'un événement B soit réalisé, sachant que A est réalisé », comme il a été présenté dans le chapitre 1. On ne s'intéresse qu'aux expériences dont le résultat réalise A , les autres étant purement et simplement écartées du décompte. Sous ces conditions, B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ l'est. Tout se passe comme si l'on choisissait le nouvel univers $\Omega' := A$ et qu'on le munissait d'une nouvelle probabilité $\mathbf{P}_A$, telle que $\mathbf{P}_A(B)$ soit proportionnelle à $\mathbf{P}(A \cap B)$. Pour cela, il est donc nécessaire de supposer que $\mathbf{P}(A) > 0^{(1)}$, et la condition de normalisation $\mathbf{P}_A(A) = 1$ mène naturellement à la définition qui suit⁽²⁾.

Définition 4.1 Soit A un événement de probabilité non nulle : $\mathbf{P}(A) > 0$. Pour tout événement B , on définit la **probabilité conditionnelle de B sachant A** comme le réel, noté $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B | A)$, valant

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B | A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

⁽¹⁾. Le cas où $\mathbf{P}(A) = 0$ est beaucoup plus délicat à gérer ; des techniques spécifiques sont expliquées au chapitre 24.

⁽²⁾. On notera que l'univers est toujours Ω , et non A ; tout ce qui est en dehors de A est cependant considéré comme *négligeable*.

Chapitre 5

Indépendance (1/2)

Les chiffres sont dénués de toute imagination, tu devrais donc te garder de leur accorder trop d'importance.

Jón Kalman STEFÁNSSON, *Entre ciel et terre*

D'une certaine manière, la notion d'indépendance est la notion qui fait que la théorie des probabilités ne se réduit pas à un cas particulier de la théorie générale des espaces mesurés, et a développé, au cours de plus de trois siècles d'existence, ses méthodes propres.

5.1 INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS ET DE TRIBUS

Indépendance de deux événements

§ 63

D'un point de vue intuitif, si un événement A semble n'avoir pas d'effet, du point de vue probabiliste, sur un événement B, alors on s'attend à ce que le calcul de la probabilité de B, conditionné par la connaissance de la réalisation (ou non) de l'événement A, conduise au même résultat que le calcul absolu de cette même probabilité, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B \mid A^c) = \mathbf{P}(B).$$

Multipliant cette égalité par la probabilité de A, on obtient $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(A)$; cette dernière forme est sans doute meilleure que la première, car elle est symétrique et met sur le même plan les événements A et B. De plus, elle ne fait pas appel à une probabilité conditionnelle pour laquelle le cas $\mathbf{P}(A) = 0$ est problématique.

Exemple 5.1 (Cas fini : nombre de cas favorables sur nombre de cas total) Revenons au cas, extrêmement simple, mais fondateur du raisonnement sur les probabilités, où Ω est un ensemble fini de cardinal N, muni d'une probabilité uniforme. À un événement A de cardinal k, on associe la probabilité $\mathbf{P}(A) = k/N$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total).

Dire que les événements A et B sont indépendants revient à dire que la connaissance de la réalisation (ou non) de A n'influe pas sur la probabilité de B, conditionnée par cette réalisation : en d'autres termes, que les rapports

$$\frac{\text{nombre de cas où B est réalisé en même temps que A}}{\text{nombre de cas où A est réalisé}}$$

Chapitre 6

Variables aléatoires discrètes

Les variables ne prenant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs jouent un rôle particulier dans la théorie des probabilités : outre qu'elles sont naturelles dans les problèmes de dénombrement, elles permettent également de comprendre et de démontrer de nombreux résultats généraux de la théorie des probabilités sans avoir recours aux outils sophistiqués de la théorie de la mesure.

Les trois chapitres qui suivent traitent de ces variables, du point de vue théorique comme du point de vue pratique.

6.1 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilitisé ; de plus, les variables aléatoires considérées seront toujours, sans que l'on prenne la peine de le préciser, à valeurs réelles.

Variable simple, variable discrète

§ 70

Soit $(\Omega, \mathfrak{T})$ un espace probabilitisable (qui pourra la plupart du temps être considéré comme un ensemble fini ou dénombrable muni de sa tribu la plus riche, à savoir $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$). Une **variable aléatoire (réelle) discrète** sur $(\Omega, \mathfrak{T})$ est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable. On dit que X est une **variable aléatoire simple** si $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé **univers-image** ou **ensemble des valeurs prises par X** ou **ensemble des réalisations de X** ; on le notera génériquement

$$X(\Omega) = \{x_k ; k \in K\}$$

où $K = \{1, 2, \dots, n\}$ si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, et $K = \mathbb{N}$ ou $K = \mathbb{N}^*$ si $X(\Omega)$ est strictement dénombrable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on note

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}$$

et

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in A\}.$$

La probabilité associée à ces événements sera notée $\mathbf{P}\{X = x\}$ et $\mathbf{P}\{X \in A\}$ plutôt que $\mathbf{P}(\{X = x\})$ et $\mathbf{P}(\{X \in A\})$.

Chapitre 7

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Voici enfin les notions d'espérance, de moments, de variance, ainsi que les premières grandes inégalités (Bienaymé-Tchebychev et Cauchy-Schwarz) qui jouent un rôle central dans toute la théorie des probabilités. Dans le cas d'une variable discrète, ces notions ne présentent pas de difficulté théorique, et les diverses propriétés que nous pouvons démontrer rigoureusement dans ce cas particulier sont en fait des propriétés qui restent vraies en toute généralité, mais qui sont alors plus difficiles à démontrer.

Nous introduisons également les fonctions génératrices associées aux variables à valeurs entières, naturelles dans les problèmes de comptage.

Pour terminer, nous appliquons les outils présentés à un problème bien connu, celui du collectionneur de vignettes.

7.1 ESPÉRANCE

Espérance

La notion d'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire généralise celle de *moyenne pondérée* que même les moins matheux connaissent — qui, enfant, n'a pas calculé sa moyenne trimestrielle en tenant en compte des coefficients de chaque matière ? Soit X une variable aléatoire **simple**, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec des probabilités respectives $p_k = \mathbf{P}\{X = x_k\}$, où bien entendu $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. La moyenne pondérée de ces valeurs, notée $\mathbf{E}(X)$ ou $\mathbf{EX}$, est appelée **espérance (mathématique)** de X :

$$\mathbf{EX} = \mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

Exemple 7.1 Considérons un univers Ω et une partition finie $\Omega = A + B + C$ de cet univers. On suppose que X prend la valeur a sur A , la valeur b sur B et la valeur c sur C . On suppose de plus que $\mathbf{P}(A) = 1/3$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(C) = 1/6$. Alors

Chapitre 8

Couples de variables aléatoires discrètes

L'exemple le plus simple de vecteur aléatoire est donné par un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes. Étudier la loi d'un tel couple revient donc à déterminer les probabilités élémentaires notées indifféremment

$$\mathbf{P}\{X = x, Y = y\}, \quad \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}\{(X, Y) = (x, y)\}.$$

- Dans une première partie, nous relierons la loi du couple aux lois marginales, qui sont les lois des seules variables X ou Y ; nous étudions également la loi de variables de la forme $\varphi(X, Y)$.
- Nous nous concentrons ensuite sur le cas particulier des variables indépendantes, notamment sur l'espérance $\mathbf{E}(XY)$ de leur produit et sur la loi de leur somme $X + Y$.
- Nous enchaînons sur l'étude de la covariance d'un couple et sur la définition de son coefficient de corrélation.
- Enfin, nous abordons la notion d'espérance conditionnelle qui, dans le cas de variables discrètes, ne pose aucune difficulté théorique. Cette thématique sera reprise dans la suite (chapitre 24).
- Pour terminer le chapitre, on traite un exemple de sommation d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, avec application à l'étude de l'extinction d'une espèce ou d'un nom de famille.

Position du problème

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ et on suppose que l'on a deux variables aléatoires réelles discrètes, X et Y . Connaître la loi de X et la loi de Y ne permet pas, en général, de déterminer la probabilité que le couple (X, Y) prenne une valeur (x, y) donnée.

Donnons un exemple. On définit l'univers $\Omega := \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, et on suppose que l'on connaît deux variables aléatoires X et Y de même loi

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0, 3$$

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{Y = 1\} = 0, 5$$

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = \mathbf{P}\{Y = 2\} = 0, 2$$

Chapitre 9

Interlude : le jeu de pile ou face

Dans ce chapitre, nous explorons quelques propriétés élémentaires du jeu de pile ou face. Après avoir défini un espace probabilisé permettant de modéliser une succession infinie de tirages, on s'intéresse à la loi de la longueur de séquences homogènes, puis à un jeu consistant à parier sur la sortie d'une séquence particulière (PPF) avant une autre (FPP). Cela nous permet d'aborder la théorie des événements régénératifs. Enfin, nous terminons par un parallèle entre les suites de tirages à pile ou face et les probabilités continues, via le théorème de Borel sur les nombres normaux, parallèle qui mènera à deux conclusions :

- *une suite de variables de Bernoulli indépendantes ou un réel de $[0; 1[$, c'est (presque) pareil ;*
- *il est possible de prouver (avec une certitude absolue, et non pas presque sûrement) l'existence de nombres possédant certaines propriétés, en utilisant l'attrail des probabilités, et ce bien qu'aucune des propriétés calculées n'ait un quelconque rapport avec le hasard.*

9.1 FORMALISATION

Espace probabilisé associé à une partie infinie de *pile* ou *face*

§ 133

Par convention, les lettres P et F représentent l'issue d'un tirage à *pile* ou *face* ; on les identifiera conventionnellement avec les valeurs numériques $P = 1$ et $F = 0$, ou avec des notions de succès ($P = \text{succès}$, $F = \text{échec}$).

On modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à *pile* ou *face* par l'espace $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, que l'on munit d'une tribu $\mathfrak{T}$ et d'une probabilité $\mathbf{P}$ définie sur cette tribu. Un élément ω de Ω est donc une suite

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \quad \omega_k \in \{P, F\}.$$

Avant de déterminer quelle tribu choisir, on s'accorde d'abord sur les « événements » dont on exige, *a minima*, qu'ils soient dans $\mathfrak{T}$. Par exemple, on aimerait pouvoir parler de l'ensemble des parties telles que le troisième tirage est *pile* et le cinquième *face*.

Chapitre 10

Variables aléatoires à densité

En l'absence (temporaire) d'une théorie de la mesure et, notamment, de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que du cortège de théorèmes d'intégration qui lui est associée, les trois chapitres qui suivent, et qui traitent tous de variables à densité, présentent un certain nombre de résultats non démontrés, mais justes (!) ; l'accent est mis sur la pratique. La théorie justifiant les méthodes proposées fait l'objet des chapitres 14 à 16.

Dans ce chapitre,

- nous définissons les variables à densité (qu'on appelle aussi variables absolument continues) ;
- nous présentons les lois classiques (uniforme, exponentielle et normale, notamment) ;
- enfin, nous établissons les formules utiles lors d'un changement de variable aléatoire $Y = \varphi(X)$.

À propos de l'intégrabilité des fonctions

Nous rappelons un résultat essentiel de la théorie de l'intégration : si f est une fonction à valeurs positives et possédant la régularité nécessaire⁽¹⁾, alors on peut définir l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$:

- si f est intégrable, la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est finie ;
- si f n'est pas intégrable, $\int_{-\infty}^{+\infty} f = +\infty$.

Nous utiliserons librement cette propriété, notamment lors de la preuve de l'intégrabilité d'une fonction.

Si f est une fonction à valeurs réelles (pas forcément positives), la situation est un tout petit peu plus compliquée ; l'intégrabilité de f est équivalente à la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Notamment, la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ peut être définie⁽²⁾ sans que la fonction f soit intégrable.

Enfin, les fonctions considérées dans ce chapitre auront toujours, même si ce n'est pas précisé, la régularité voulue pour les intégrer, au moins localement.

(1). Selon le niveau d'abstraction et de raffinement cherché, f peut être continue par morceaux, ou mesurable et localement intégrable.

(2). Au sens de la limite de $\int_A^B f$ quand les bornes A et B tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$.

Chapitre 11

Espérance d'une variable aléatoire à densité

Par analogie avec le cas discret, nous donnons ici une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité. La plupart des propriétés de l'espérance — linéarité, formule de transfert — sont provisoirement admises. Elles seront toutes justifiées dans le chapitre 15, qui requiert une approche théorique plus élaborée. Ici, l'accent est mis sur l'utilisation pratique de ces propriétés.

11.1 ESPÉRANCE ET MOMENTS

Espérance

§ 165

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la notion d'espérance généralise, pour une variable aléatoire quelconque, la notion de moyenne d'une variable aléatoire finie. Reprenons un point de vue « heuristique⁽¹⁾ ». Soit X une variable aléatoire admettant une densité f . La probabilité dp que la variable X soit comprise entre x et $x + dx$ est $dp \approx f(x) dx$; en sommant les valeurs de X pondérées par ces probabilités, on définit la valeur moyenne de X comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Les contraintes vues au paragraphe §33 étant *a fortiori* encore valables, on est amenés à poser plus précisément la définition suivante :

Définition 11.1 Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une densité f . On dit que **X admet une espérance** ou est **intégrable** si la fonction $x \mapsto |x| f(x)$ est intégrable, ce qui revient à dire que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x f(x) dx$$

⁽¹⁾. C'est-à-dire le point de vue du physicien, ou du mathématicien de l'époque de ténèbres précédant la théorie de la mesure et son cortège de tribus, mais durant laquelle il fallait tout de même avancer.

Chapitre 12

Couples de variables à densité

Dans tout ce chapitre, nous considérons des couples (X, Y) de variables aléatoires, ce qui revient à considérer une variable aléatoire $\mathbf{X} = (X, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La généralisation à des n -uplets $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires (ou à des variables aléatoires $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) est presque toujours immédiate.

Les propriétés déjà vues pour les couples discrets sont reprises ici, et quelques cas particuliers sont mis en avant (comme la somme de variables normales indépendantes). Une approche heuristique des lois conditionnelles est proposée, avec un exemple détaillé, ainsi qu'un nouvel aperçu de l'espérance conditionnelle. Là encore, le but de ce chapitre est de faire manipuler les notions; aussi le chapitre s'achève-t-il sur une quinzaine d'exercices, aisés pour la plupart, dont nous conseillons fortement l'étude avant de passer à la partie suivante, consacrée à des aspects plus théoriques.

12.1 LOI D'UN COUPLE

Loi d'un couple, lois marginales

La **fonction de répartition (conjointe)** du couple (X, Y) est la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \mathbf{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Elle représente la probabilité que le couple (X, Y) prenne ses valeurs dans le domaine $\Delta(x, y)$ du plan représenté sur la figure 12.1 page suivante.

La fonction F est croissante par rapport à chacune de ses variables, donc admet une limite quand $x \rightarrow \pm\infty$ ou $y \rightarrow \pm\infty$. Nous noterons $F(x, +\infty)$ pour $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ et ainsi de suite.

■ **Proposition 12.1** $F(+\infty, +\infty) = 1$ et $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : Pour toutes suites croissantes $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ de limites $+\infty$, on peut écrire $\mathbb{R}^2$ comme l'union croissante

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(X, Y) \in \Delta(x_n, y_n)\}.$$

Chapitre 13

Exercices et problèmes

Ce chapitre présente un certain nombre d'exercices et de problèmes classiques, tous accessibles sans les outils de la théorie de la mesure (que l'on introduira dans les chapitres 14 et 15).

EXERCICES

Espaces probabilisés

♦ **Exercice 13.1** Existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ tel que l'univers Ω soit dénombrable, et sur lequel soit définie une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre $p \in]0; 1[$?

On pourra commencer par le cas simple où $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

♦ **Exercice 13.2 (Densité d'une partie de $\mathbb{N}$)** On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ **admet une densité** si la limite suivante existe :

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n}.$$

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ admettant une densité.

- i) Donner des parties A pour lesquelles $\mu(A) = 0$, $\mu(A) = 1$, $\mu(A) = 1/2$ et montrer que $\mathcal{L} \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
- ii) L'ensemble $\mathcal{L}$ est-il une tribu sur $\mathbb{N}$?
- iii) La fonction $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0; 1]$ est-elle σ -additive au sens où, si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{L}$ telle que $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est élément de $\mathcal{L}$, a-t-on $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$?
- iv) Existe-t-il une probabilité sur une tribu de $\mathbb{N}$ contenant $\mathcal{L}$, dont la restriction à $\mathcal{L}$ soit égale à μ ?

♦ **Exercice 13.3 (Borel-Cantelli généralisé)** Soit Y une variable aléatoire positive.

- i) Établir l'inégalité $\mathbf{E}(Y)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2) \cdot \mathbf{P}\{Y > 0\}$.
- ii) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements non tous négligeables. Montrer l'inégalité

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)\right)^2}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j)}.$$

Chapitre 14

Variables aléatoires : cas général

Certaines variables aléatoires ne sont ni discrètes, ni absolument continues. Si la fonction de répartition de certaines de ces variables peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'une fonction de répartition discrète et d'une fonction de répartition absolument continue, le cas général mérite une étude à part entière.

Nous terminons ce court chapitre en établissant un théorème d'une grande importance : toute variable aléatoire positive est limite (au sens de la convergence simple) d'une suite croissante de variables aléatoires simples (étagées). Ce théorème permettra de construire la notion générale d'espérance d'une variable aléatoire, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé ; en l'absence de précision, toutes les variables aléatoires rencontrées sont définies sur cet espace, et à valeurs réelles.

14.1 MESURABILITÉ

Définition d'une variable aléatoire

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles. Afin d'étudier la probabilité image induite par une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire de calculer la probabilité $\mathbf{P}\{X \in B\}$ pour que X prenne ses valeurs dans un borélien B de $\mathbb{R}$, il est nécessaire que les ensembles $\{X \in B\}$ soient tous éléments de la tribu $\mathfrak{T}$.

Définition 14.1 Soit $(\Omega, \mathfrak{T})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire réelle** est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'événement $\{X \in B\}$ est un élément de la tribu $\mathfrak{T}$. On dit également que X est une application **mesurable** de l'espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{T})$ dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

On notera :

- $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$ l'espace des applications mesurables de $(\Omega, \mathfrak{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$;
- $\mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathfrak{T})$ l'espace des applications mesurables positives, et

Chapitre 15

L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité

Un des (nombreux) avantages de l'utilisation de la théorie abstraite de l'intégrale de Lebesgue en probabilités, initiée notamment par Fréchet et Kolmogorov, est de pouvoir écrire l'espérance d'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, non en prenant pour objet de base l'ensemble d'arrivée (la droite $\mathbb{R}$), comme dans les formules

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{P}\{X = x_n\}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

déjà vues pour des variables aléatoires respectivement discrètes et absolument continues, mais au contraire en partant de l'espace Ω lui-même, selon une formule qui prendra l'allure suivante :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}.$$

(L'intégrale est calculée sur l'ensemble Ω grâce à la mesure de probabilité, notée $d\mathbf{P}(\omega)$, selon une procédure standard qui sera brièvement présentée.) Ce changement radical de point de vue permet notamment de prouver des résultats « simples », comme la linéarité de l'espérance, qui sont quasiment indémontrables avec les formules précédentes⁽¹⁾.

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$.

⁽¹⁾. On peut certes prouver la linéarité de l'espérance dans le cas de variables discrètes, mais au prix de notations bien lourdes. Quant au cas continu, il a été admis.

Chapitre 16

Vecteurs aléatoires

La généralisation de couples de variables aléatoires est la notion de vecteurs aléatoires, ou encore variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Bien que l'on puisse travailler dans un espace vectoriel euclidien de dimension n quelconque, nous supposons toujours que celui-ci est égal à $\mathbb{R}^n$, et nous identifions donc un vecteur $\mathbf{X}$ à un n -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires.

Après une rapide étude de la manière dont on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace probabilisé, nous introduisons la notion de matrice de covariance d'un vecteur aléatoire, puis le théorème de Fubini permettant de calculer des intégrales multiples en se ramenant à n intégrales simples, sous des hypothèses simples. La dernière partie du chapitre concerne les changements de variables aléatoires — permettant, par exemple, d'étudier la loi d'un couple (U, V) , image d'un autre couple (X, Y) de loi connue par une application $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Notations

§ 229

Dans tout ce chapitre, l'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$$

et identifié à l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes ; le contexte permet de trancher. Il est muni de son produit scalaire canonique défini par

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

en écrivant (abusivement)

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'alors, pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, et pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \mathbf{x} | A \mathbf{y} \rangle = \langle {}^t A \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle. \quad (16.1)$$

Chapitre 17

Indépendance (2/2)

La notion d'indépendance d'une famille d'événements permet de définir, de manière très générale, celle d'indépendance d'une famille de variables aléatoires quelconques. Des outils théoriques et des méthodes pratiques sont exposés ici concernant cette notion, avec des applications à la somme et au produit de variables aléatoires indépendantes.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une introduction à la notion de temps d'arrêt, permettant de généraliser l'identité de Wald, déjà rencontrée au chapitre 8.

17.1 INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Indépendance de deux variables aléatoires

§ 241

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tous événements A et B ,

$$\mathbf{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbf{P}\{X \in A\} \cdot \mathbf{P}\{Y \in B\}.$$

Cette définition mettant en jeu des événements du type $\{X \in A\}$, où A est un borélien, on introduit la notion de tribu engendrée par une variable aléatoire.

Définition 17.1 Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. La **tribu engendrée par X** , notée $\sigma(X)$, est l'ensemble des événements de la forme $\{X \in A\}$, où A décrit l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$. C'est bien sûr une tribu.

Remarque 17.2 La tribu $\sigma(X)$ est donc, par construction, la plus petite tribu par rapport à laquelle la variable aléatoire X est mesurable. En effet, une telle tribu contient nécessairement tous les $\{X \in A\}$ pour $A \in \mathfrak{B}$, donc contient $\sigma(X)$.

Définition 17.3 Deux tribus $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont dites **indépendantes** si, quels que soient les événements $A_1 \in \mathfrak{T}_1$ et $A_2 \in \mathfrak{T}_2$, ces événements sont indépendants :

$$\forall A_1 \in \mathfrak{T}_1 \quad \forall A_2 \in \mathfrak{T}_2 \quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2).$$

Chapitre 18

Fonctions caractéristiques

Dans ce chapitre, nous présentons la définition et les principales propriétés de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Il y a finalement peu de « vraies » probabilités présentes, seulement de la belle analyse assez standard, ce pourquoi nous ne nous attardons guère sur le sujet.

Cependant, les fonctions caractéristiques sont un outil d'une grande puissance dont on se passe difficilement, notamment lors de l'étude de la convergence de variables aléatoires ; elles permettent également une démonstration assez simple du théorème central limite. Le lecteur pressé peut se contenter, dans un premier temps, de parcourir les propriétés les plus importantes : théorème d'unicité, fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Variables aléatoires complexes

§ 254

Nous pouvons généraliser dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes les notions de variable aléatoire (c'est-à-dire de fonction mesurable) et d'espérance.

Munissons tout d'abord $\mathbb{C}$ d'une tribu, en identifiant dans un premier temps le plan complexe au plan réel $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme $A \times B$, où A et B sont des boréliens, n'est pas une tribu. On note $\mathfrak{B}^2$ ou $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ la tribu engendrée par l'ensemble de ces parties ; c'est une tribu sur $\mathbb{R}^2$, appelée **tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^2$** . On peut vérifier⁽¹⁾ que cette tribu est également engendrée par les rectangles de $\mathbb{R}^2$. On la note également $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$, l'espace $\mathbb{R}^2$ étant vu explicitement comme le plan complexe $\mathbb{C}$.

Soit X une **variable aléatoire complexe**, c'est-à-dire une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable par rapport aux tribus $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Séparons la partie réelle de la partie imaginaire : il suffit, pour tout $\omega \in \Omega$, d'écrire $X(\omega)$ sous la forme $Y(\omega) + iZ(\omega)$ où $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$ sont tous deux réels. On définit ainsi deux applications Y et Z vérifiant $X = Y + iZ$. Ce sont les images de l'application mesurable X par les fonctions continues « partie réelle » et « partie imaginaire », elles sont donc également mesurables⁽²⁾ : ce sont des variables aléatoires.

Si Y et Z admettent toutes deux une espérance, on définit l'**espérance** de X comme

$$\mathbf{E}(X) := \mathbf{E}(Y) + i\mathbf{E}(Z).$$

(1). Voir l'annexe B pour plus de détails.

(2). Corollaire 14.6 page 319.

Chapitre 19

Vecteurs gaussiens (*)

Les vecteurs gaussiens, généralisation naturelle à $\mathbb{R}^d$ des lois normales sur $\mathbb{R}$, sont présentés en deux temps. D'abord sur $\mathbb{R}^2$, dans une approche assez pédestre ; quelques aspects numériques (droites de corrélation, ellipses d'égale densité,...), utiles en physique ou en traitement du signal, sont abordés. Sur $\mathbb{R}^d$ ensuite, de manière plus théorique, où l'on caractérise un vecteur gaussien $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ par le fait que $\langle \mathbf{u} | \mathbf{X} \rangle$ suit une loi normale pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^d$.

19.1 LOIS NORMALES SUR $\mathbb{R}^2$

Lois normales et extension

§ 264

La loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ sur $\mathbb{R}$ (on dit aussi loi gaussienne **univariée**), d'espérance m et de variance σ^2 admet pour densité

$$n_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} n\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}. \quad (19.1)$$

(Voir page 239 pour des rappels élémentaires.) Cette loi est d'une importance fondamentale en théorie des probabilités et dans ses applications, notamment en statistiques. En effet, comme le montre le théorème central limite, la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi, correctement renormalisée, suit approximativement une loi normale, et ce, *quels que soient les détails de la loi commune à ces variables* ; quelques hypothèses simples sont naturellement requises, comme l'existence d'un moment d'ordre 2. Afin d'inclure tous les cas de figure, on peut également définir la **loi normale dégénérée** $\mathcal{N}(m; 0)$, de variance nulle, comme la loi certaine de valeur m (ou **mesure de Dirac** en m), dont la fonction de répartition vaut $F(x) = 0$ si $x < m$ et $F(x) = 1$ si $x \geq m$ ⁽¹⁾.

Cette fâcheuse dichotomie entre lois normales de variances strictement positives (continues, et admettant une densité) et dégénérées (discontinues, et n'en

⁽¹⁾. Par définition de la convergence en loi (§288), on a convergence en loi de $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ vers $\mathcal{N}(m; 0)$ lorsque $\sigma \rightarrow 0$. On remarquera que, au sens des distributions, l'expression (19.1) converge vers la distribution de Dirac en m .

Chapitre 20

Convergence

On introduit dans ce chapitre les principales notions de convergence de suites de variables aléatoires : convergence presque sûre, convergence en probabilité, convergence en loi. Les relations, parfois subtiles, entre ces notions, sont développées, et des critères simples les caractérisant sont exposés.

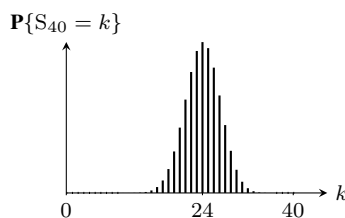
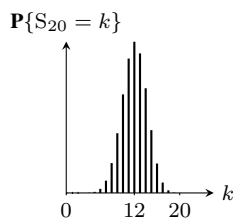
Ce chapitre est, par essence, très technique. Il est cependant important de s'y plonger un temps suffisant pour bien se pénétrer des techniques exposées. Plus que tout autre chapitre, celui-ci doit être lu un crayon à la main. Le minimum syndical à connaître pour pouvoir aborder les lois des grands nombres et le théorème central limite sont indiqués par un ou deux symboles « ◀ » en marge.

Afin de faire oublier un peu l'aridité du sujet, on termine par deux applications simples. Dans la première, on montre que, dans les espaces euclidiens de grande dimension, presque tous les vecteurs sont presque orthogonaux. Dans la seconde, on étudie une propriété caractérisant les suites de réels dont la partie décimale est équirépartie sur $[0; 1[$.

Introduction aux théorèmes limites

§ 278

Nous avons déjà rencontré plusieurs résultats typiques de ce que l'on appelle des *théorèmes limites*, notamment dans le cas d'une succession infinie de tirages à *pile* ou *face*. Ci-dessous, nous représentons le diagramme en bâtons de la loi du nombre de *pile* obtenu lors de n tirages : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, où X_k est la variable valant 1 si le k -ième tirage amène *pile* et 0 sinon (la probabilité d'obtenir *pile* étant ici $p = 0,6$; les valeurs successives de n sont 20, 40 et 160).



Chapitre 21

Loi des grands nombres

GULDENSTERN (Flips a coin) : *The law of averages, if I have got this right, means that if six monkeys were thrown up in the air for long enough they would land on their tails about as often as they would land on their —*

ROSENCRANTZ : *Heads.* (He picks up the coin.)

TOM STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead*⁽¹⁾.

Ce chapitre présente deux grands résultats sur les suites de variables aléatoires.

- Le premier est la loi du zéro-un (ou loi du tout-ou-rien) de Kolmogorov qui stipule qu'un événement, ne dépendant que de manière asymptotique d'une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ quelconque de variables aléatoires indépendantes, est nécessairement de probabilité 0 ou 1.
- Le second est la très fameuse loi des grands nombres, déclinée dans plusieurs versions, et dont l'importance n'est plus à souligner. C'est le théorème qui permet notamment de relier la probabilité abstraite à la « fréquence limite du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas » lorsque l'on répète une expérience un grand nombre de fois. Une démonstration relativement élémentaire de la version « forte » de ce théorème est donnée en annexe.

21.1 LA LOI DU TOUT OU RIEN (OU DU 0-1) (*)

Événements de queue, tribu asymptotique

§ 304

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires; on appelle **événement de queue** associé à cette suite tout événement qui peut être déterminé par l'ensemble des valeurs prises par cette suite, mais qui n'est pas modifié lorsque l'on change arbitrairement un nombre fini de ces valeurs. En d'autres termes, un événement de queue est un événement qui est entièrement déterminé par le comportement asymptotique de la suite des valeurs de $(X_n)_{n \geq 0}$.

⁽¹⁾. GULDENSTERN (*Lance une pièce*) : D'après la loi des grands nombres, si j'ai bien compris, si on lance six singes un grand nombre de fois, ils retomberont sur leurs fesses à peu près aussi souvent que sur leur —

ROSENCRANTZ : *Face.* (*Il ramasse la pièce.*)

Chapitre 22

Le théorème central limite

Le célèbre théorème central limite permet d'aller au-delà du résultat de la loi des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 , alors les fluctuations de la moyenne $M_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ autour de m se font sur une échelle typique en $\sigma/\sqrt{n}$ et suivent, asymptotiquement, une loi précise : la loi normale $\mathcal{N}(0; \sigma^2/n)$. En d'autres termes, on peut approcher la loi de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ par la loi normale $\mathcal{N}(nm; n\sigma^2)$.

D'autres formes du théorème permettent aux variables X_n de suivre des lois différentes, à condition que leurs variances ne deviennent pas trop petites.

Les conséquences de ce théorème fondamental sont innombrables, et tout d'abord en statistiques : si l'on ajoute des quantités inconnues mais indépendantes, le résultat est (presque) une loi normale !

En conclusion du chapitre, nous présentons un résultat connu sous le nom de loi du logarithme itéré, qui permet d'encadrer les fluctuations de $S_n/\sqrt{n}$.

Au-delà de la loi des grands nombres

§ 317

Dans le paragraphe § 278, nous avons vu l'évolution de la loi du nombre de *pile* obtenus au cours d'une succession de tirages à *pile* ou *face* indépendants. Notamment, la moyenne

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

converge (en probabilité et presque sûrement) vers une constante m , qui est ici la probabilité d'obtenir *pile* à chaque tirage. Cette propriété reste vraie sous l'hypothèse plus générale que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant une espérance m .

Dans la vie réelle, on ne peut pas réitérer une infinité de fois une expérience, pas plus qu'on ne saurait lancer une infinité de fois la pièce. Une question naturelle est alors : peut-on quantifier la vitesse de cette convergence ? En d'autres termes, quelle est l'importance des fluctuations autour de la valeur limite dans une figure telle que celles de la page 410 ?

La largeur typique de ces fluctuations est donnée simplement par l'écart-type de M_n , s'il est défini ; supposons désormais que les X_i admettent un moment d'ordre 2 et notons $\sigma = \sigma_{X_1}$, l'hypothèse d'indépendance des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ permet alors de conclure que leurs variances s'ajoutent (égalité de Bienaymé), et donc

Chapitre 23

Techniques d'approximation

Le chapitre précédent montre la convergence de certaines lois vers une loi normale. Or, il peut être intéressant d'approcher une distribution par une autre — notamment parce qu'une loi normale admet une densité. Nous exposons ici les techniques d'approximations : poissonnienne d'une loi binomiale, normale d'une loi binomiale ou d'une loi de Poisson.

23.1 APPROXIMATIONS POISSONIENNES

Convergence vers une loi de Poisson

§ 326

Rappelons l'énoncé du théorème 6.21, démontré au chapitre 6.

■ **Théorème 23.1 (Limite d'épreuves de Bernoulli)** Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels de $]0; 1[$ telle que $\lim n p_n = \lambda$. Pour chaque entier n , on note X_n le nombre de succès obtenus dans la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes, et de même loi $\mathcal{B}(p_n)$; ainsi, $X_n \sim \mathcal{B}(n ; p_n)$. Alors, pour tout entier k , $\mathbf{P}\{X_n = k\} \rightarrow e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, c'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cet énoncé peut se généraliser en n'imposant plus aux n épreuves de Bernoulli d'avoir le même paramètre p_n . Pour chaque valeur de n , on considère des variables $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et on forme leur somme S_n . Les variables $X_{n,k}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p_{n,k}$.

					somme
$p_{1,1}$					q_1
$p_{2,1}$	$p_{2,2}$				q_2
$p_{3,1}$	$p_{3,2}$	$p_{3,3}$			q_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$
$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$p_{n,3}$	$\dots$	$p_{n,n}$	q_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Ce théorème, comme celui qui suit, illustre le fait qu'une distribution de Poisson peut être obtenue en collationnant un grand nombre d'événements rares (et indépendants).

Chapitre 24

Espérance conditionnelle

Le simple est toujours faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable.

Paul VALÉRY

L'espérance d'une variable aléatoire peut être vue comme sa meilleure approximation sous forme d'un scalaire et, plus précisément, comme sa meilleure approximation quadratique, puisque $\mathbf{E}|Y - m|^2$ est minimale lorsque $m = \mathbf{E}(Y)$ ⁽¹⁾. Lorsque l'on connaît un renseignement numérique limitant le domaine de Ω dans lequel se trouve ω (c'est-à-dire un renseignement de la forme « $\omega \in A$ »), on peut calculer, via la probabilité $\mathbf{P}_A$ conditionnée par ce renseignement, l'« espérance conditionnée » $\mathbf{E}_A(Y)$ de Y . Si ce renseignement est le résultat d'une seconde variable aléatoire X , l'espérance conditionnelle de Y est donc une quantité dépendant de ω au travers de la valeur de X ; c'est donc une variable aléatoire mesurable par rapport à $\sigma(X)$.

Ce chapitre expose tout d'abord la théorie de l'espérance conditionnelle lorsque X est une variable aléatoire discrète — et que tout va bien. Dans un second temps, les résultats sont généralisés au cas d'une variable quelconque — et les difficultés jaillissent, qui sont résolues de deux manières différentes : par un théorème issu de la théorie de la mesure (Radon-Nikodým), ou par une interprétation géométrique de meilleure approximation quadratique dans le cas de variables de L^2 .

24.1 LE CAS FINI OU DÉNOMBRABLE

Dans toute cette section, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ et discrètes, ce qui permettra de définir de manière élémentaire la notion d'espérance conditionnelle puis de démontrer par simple calcul quelques propriétés essentielles ; on vérifiera que celles-ci sont encore vraies pour des variables quelconques, bien que les démonstrations fassent alors appel à des outils plus sophistiqués.

⁽¹⁾. Théorème 15.38 page 351. On en rappelle l'interprétation géométrique : l'espérance de X est égale à sa projection orthogonale sur la droite des variables aléatoires déterministes (= constantes) $D = \text{Vect}(\mathbf{1})$.

Chapitre 25

Quelques résultats élégamment établis par la théorie des probabilités

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats d'analyse démontrés avec des méthodes, des théorèmes ou des idées provenant du monde probabiliste.

- *La formule de Bernstein est une formule découlant rapidement du théorème central limite, mais plus difficile à démontrer avec des outils élémentaires d'analyse.*
- *Le même théorème central limite permet une démonstration relativement élémentaire de la formule de Stirling.*
- *Deux théorèmes (§ 364 et § 365) sont représentatifs de la méthode probabiliste, historiquement introduite par Erdős. Il s'agit de prouver l'existence (certaine !) d'un objet possédant telle propriété, en montrant par exemple que la mesure de l'ensemble des objets possédant cette propriété est strictement positive. Le langage même de l'aléatoire pourrait d'ailleurs être totalement gommé au profit de celui de mesure — mais l'intuition initiale étant probabiliste, ne boudons pas notre plaisir.*
- *Le théorème de Weierstrass sur la densité de l'espace des fonctions polynomiales a reçu, au début du siècle, une démonstration particulièrement simple et élégante par Bernstein ; c'est l'occasion de voir l'apparition très naturelle des polynômes du même nom.*

La formule de Bernstein

Un exemple des plus célèbres d'application « non probabiliste » des probabilités est la **formule de Bernstein** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Ce n'est pas à vrai dire une application tellement impressionnante des probabilités : peu de mathématiciens se réveillent le matin en se disant « Tiens, j'aimerais bien démontrer cette formule » et finissent pas se dire que les probabilités peuvent les

Chapitre 26

Simuler informatiquement une loi de probabilité

GUILDENSTERN *Syllogism the second: One, probability is a factor which operates within natural forces. Two, probability is not operating as a factor. Three, we are now within un-, sub- or supernatural forces. Discuss. (Rosencrantz is suitably startled. Acidly.) Not too heatedly.*⁽¹⁾

Tom STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead.*

*Toutes les méthodes de simulation de lois probabilistes se basent sur l'existence d'une source aléatoire de loi uniforme. Le lecteur ne cherchant qu'à simuler une loi de Poisson, une loi normale, etc., peut admettre l'existence d'un programme informatique, que nous appellerons « **rand** », dont les sorties successives, lorsqu'il est appelé de manière répétée, forment une suite numérique $u_0, u_1, u_2, \dots$ correspondant à une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0; 1]$. Une très courte discussion sur les algorithmes permettant de simuler une loi uniforme est proposée en fin de chapitre.*

26.1 SIMULER UNE LOI DISCRÈTE

Dans toute la suite du chapitre, on supposera donnée une fonction **rand** qui retourne un réel de l'intervalle $[0; 1[$, avec une probabilité uniforme, et telle que des appels successifs à cette fonction donnent des résultats indépendants.

Remarque 26.1 Remarquons d'ores et déjà que l'on aura parfois à considérer que **rand** retourne un réel de $]0; 1[$, ou de $[0; 1]$; comme dans tous les cas, la probabilité d'obtenir exactement 0 ou 1 est nulle, il n'y a pas de véritable contradiction.

⁽¹⁾. GUILDENSTERN Syllogisme II : primo, la probabilité est un facteur agissant au sein de forces naturelles. Deuxio, la probabilité n'agit pas en tant que facteur. Tertio, nous sommes les jouets de forces anti-, sous- ou surnaturelles. Discutez. (*Rosencrantz est proprement ébahi. D'un ton aigre :*) Ne nous emportons pas.

Chapitre 27

Méthodes de Monte-Carlo

L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout-à-fait accidentel, & que le hasard, selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi-bien que de celui de l'analyse.

Comte de BUFFON, Essai d'Arithmétique morale, chap. XXIII

La méthode de Monte-Carlo a été développée à Los Alamos par John von Neumann, Stanisław Ulam, Enrico Fermi et Nicholas Metropolis (qui en invente le nom) pour effectuer des calculs numériques que les algorithmes déterministes rendaient rédhibitoirement longs [76].

Elle a connu une fortune prodigieuse et ses avatars permettent de résoudre de manière très précise de nombreux problèmes : calcul d'intégrales, résolution d'équations différentielles, recherche de minimas, recherche d'algorithmes optimaux. Le domaine d'application est en réalité si vaste que l'on ne peut qu'à peine en effleurer la surface dans les quelques pages qui suivent.

Des méthodes basées sur des tests aléatoires permettent également de dire, très rapidement et avec un risque très faible d'erreur, si un entier est premier ou non⁽¹⁾ (§ 389). Des études statistiques permettent également de deviner si une liste de données a été falsifiée ou non (§ 392).

⁽¹⁾. La commande `isprime` du logiciel Maple, par exemple, effectue un test probabiliste de primalité, et non une étude déterministe, qui serait astronomiquement trop coûteuse en temps pour des grands entiers.

Chapitre 28

Chaînes de Markov

De ce très vaste sujet, nous n'aborderons ici qu'un exemple : celui des chaînes de Markov homogènes à nombre fini d'états. On peut voir ces chaînes comme des promenades aléatoires sur un graphe fini où, à chaque pas, le promeneur choisit un des chemins qui lui sont offerts avec une loi de probabilité fixée et ce, sans garder mémoire de son passé.

On étudie un système pouvant se trouver dans un nombre fini d'états, notés $E_1, E_2, \dots, E_d$, et qui évolue en temps discret repéré par un entier n parcourant $\mathbb{N}$. À l'instant 0, le système n'est pas forcément dans un état déterminé, mais décrit par une **loi initiale** $\pi_0 = (\pi_0(1), \dots, \pi_0(d))$: le système se trouve dans l'état E_i avec la probabilité $\pi_0(i)$. Des questions se posent naturellement :

- Si le système est dans un certain état E_i à $t = 0$, quels autres états lui sont accessibles ?
- Reviendra-t-il à l'état E_i ?
- De manière plus générale, comment décrire la probabilité qu'a le système de se trouver dans un état E_i au cours du temps ?
- Y a-t-il un « comportement asymptotique » quand $n \rightarrow \infty$?
- Avec quelle fréquence le système repassera-t-il par chacun des états ?

Après avoir étudié les propriétés des matrices de transition, on donnera deux types de propriétés des états : celles directement liées aux coefficients de la matrice de transition (périodicité, accessibilité) et celles découlant de propriétés asymptotiques (états récurrents, transitoires).

28.1 MATRICES DE TRANSITION

On se donne un système (physique, mathématique, biologique...) pouvant évoluer, à temps discret (indexé par n), et se trouver dans différents états E_i . On suppose de plus que ce système n'a aucune mémoire de son passé et ne connaît que son état présent à l'instant n pour évoluer jusqu'à l'instant $n + 1$. Enfin, on suppose que cette évolution ne dépend pas du temps (ou encore : est invariante par translation dans le temps).

Exemple 28.1 Les systèmes admettant une telle description sont nombreux :

- étude d'une marche aléatoire (et, au-delà, d'un mouvement brownien) ;
- évolution au cours du temps (discrétisé) du nombre d'atomes dont le moment magnétique pointe vers le haut (modèle d'Ising et assimilés) ;
- étude d'une population ;

Chapitre 29

Arithmétique et probabilités : une randonnée

Par Emmanuel Kowalski

La théorie des probabilités est basée sur un certain nombre d'idées et de concepts abstraits qui ont été modélisés par Kolmogorov en particulier. Depuis lors, il est naturel de s'intéresser à ces idées indépendamment de toute réalisation concrète, en s'appuyant sur des résultats généraux qui établissent, a priori, que les hypothèses que l'on peut faire (comme l'existence de suites (X_n) de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données à priori) ne sont pas contradictoires.

Dans ce chapitre, le point de vue est un peu différent : nous allons considérer des objets parfaitement concrets et, apparemment, « déterministes », et nous allons pourtant expliquer qu'ils peuvent incarner la plupart des constructions probabilistes importantes. Ces objets seront, tout simplement, les entiers naturels strictement positifs, qui sont l'objet de la théorie des nombres.

On peut aussi voir cette approche comme parallèle à celle des simulations à la Monte-Carlo : ici, on va faire apparaître des lois de probabilités usuelles (comme la loi normale, ou les lois de Poisson, et l'on pourrait donner beaucoup d'autres exemples) ou inhabituelles (la mesure qui contrôle l'écart entre valeurs propres entre matrices unitaires de grande taille) non pas à l'aide de processus physiques que l'on peut aisément (!) créer dans le monde réel, mais à l'aide de la suite des entiers naturels.

Du point de vue des mathématiques pures, ce chapitre est aussi une illustration de l'intérêt des idées et des raisonnements probabilistes, et surtout de la convergence en loi, qui — cachée souvent sous le nom « équirépartition » — est l'une des idées les plus utiles qui soit...

Chapitre 30

Bosons, fermions et boltzmannions

Dans ce court chapitre, nous montrons deux applications simples du dénombrement à la mécanique statistique. La première consiste à montrer que, dans un système isolé constitué d'un grand nombre de particules, la probabilité de trouver l'une d'elles dans un état individuel d'énergie ε est proportionnel à $e^{-\beta\varepsilon}$, où β est une constante que l'on peut identifier à $1/k_B T$, où T est la température du système et k_B la constante de Boltzmann. Dans la seconde, nous montrons comment l'hypothèse d'indiscernabilité des particules — bosons ou fermions — affecte leur répartition et, notamment, le nombre moyen d'états occupés.

30.1 LE FACTEUR DE BOLTZMANN

Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques

§ 415

Dans une série de travaux qui ont profondément bouleversé la physique moderne, le physicien allemand Ludwig BOLTZMANN (1844-1906) a posé les principes probabilistes de la thermodynamique statistique. Il s'agissait de construire, de façon mathématique, un modèle de gaz dont les particules, régies par les lois usuelles de la mécanique, sont en nombre si grand que la description individuelle doit être remplacée par une description statistique⁽¹⁾. À l'époque de la fondation de la mécanique statistique, il s'agissait d'ailleurs surtout de décrire des systèmes à l'équilibre⁽²⁾.

Le principe de base de la mécanique statistique est de considérer que les positions et les vitesses des molécules d'un gaz peuvent être considérées comme des

(1). Rappelons qu'un litre de gaz à pression et température ambiante contient environ $3 \cdot 10^{22}$ molécules ; la description mécanique du système est donc la donnée d'autant d'équations différentielles d'ordre 2 pour chaque dimension d'espace.

(2). Les mouvements des particules étant rapides, une transformation « lente » à l'échelle humaine peut être décrite comme une succession de positions d'équilibre ; les transformations violentes (comme le cas d'un gaz emprisonné dans une bouteille de verre, elle-même contenue dans une enceinte hermétique, au moment où la bouteille se brise) ne sont pas concernées par la mécanique statistique à l'équilibre : tout au plus peut-on décrire l'état initial et l'état final après relaxation du système.

Chapitre 31

Processus de Poisson

(brève introduction)

Dans ce court chapitre, nous présentons un premier exemple simple de processus stochastique (un second exemple plus compliqué, le mouvement brownien, fait l'objet du chapitre suivant). Un processus de Poisson est un cas particulier de processus de comptage : c'est une famille $\{N(t) ; t \geq 0\}$ de variables aléatoires à valeurs entières, qui « compte » le nombre d'occurrences d'un certain type d'événement avant l'instant t . Le lien, déjà aperçu plusieurs fois, entre variables exponentielles et variables de Poisson, trouve ici son expression la plus achevée. La théorie montre de plus que, sous des hypothèses générales, un processus de Poisson est une modélisation convenable de situations naturelles, ce qui explique la grande faveur dans laquelle est tenue ce type de processus.

En guise d'introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

§ 422

Comment distribuer aléatoirement, et indépendamment les uns des autres, des points sur la demi-droite réelle $\mathbb{R}^+$, de telle sorte que leur densité soit (en moyenne) constante sur chaque intervalle ? Par indépendant, on entend ceci : que le nombre de points dans un intervalle $[a; b]$ soit indépendant du nombre de points dans un intervalle $[c; d]$ disjoint du premier.

La méthode naïve (placer les points les uns après les autres) échoue avant même de débiter : comment diable pourrait-on placer un point uniformément sur $[0; +\infty[$?

Une autre approche possible est la suivante. Notons λ la densité désirée. Il est bien entendu que, par densité, on entend : le nombre de points sur un intervalle $[a; b]$ est une variable aléatoire, d'espérance $(b - a)\lambda$. Si $n \geq 1$ est un entier, plaçons, uniformément et indépendamment, n points sur l'intervalle $[0; n/\lambda]$. À la limite $n \rightarrow \infty$, on devrait obtenir la modélisation désirée.

Le problème de cette deuxième méthode est qu'elle ne converge qu'en loi : chaque fois que l'on change n , il faut recalculer tous les points. Et, à n fixé, aucune condition n'est vraiment respectée : la densité n'est bien sûre égale à λ que sur $[0; n/\lambda]$, mais de plus la répartition des points ne satisfait pas à la condition d'indépendance. Par construction, le nombre total de points sur l'intervalle

Chapitre 32

Mouvements browniens

La théorie du mouvement brownien s'est, depuis un peu plus d'un siècle, développée de façon spectaculaire. De manière tout à fait remarquable, elle est au cœur de l'intérêt de nombreux mathématiciens et de physiciens ; si elle a fourni une modélisation satisfaisante du mouvement observé de fines particules et permis une détermination expérimentale de la constante d'Avogadro, son intérêt n'a cessé de croître quand d'éminents physiciens ont proposé une formulation entièrement nouvelle de la théorie quantique des champs par des intégrales dont les variables étaient des chemins browniens ; ces connexions très profondes entre mouvement brownien et théorie quantique des champs ont été étendues à la mécanique statistique, la gravitation quantique, la théorie de la percolation, etc. Le champ de recherche du mouvement brownien est gigantesque et en perpétuelle expansion, diverses disciplines (probabilités, analyse harmonique, physique théorique, mathématiques financières) s'y rencontrant et s'enrichissant mutuellement.

À cause de la très grande technicité des outils mis en jeu, toutefois, nous devons nous contenter de proposer une simple introduction à ce vaste domaine, le but (avoué) étant d'abord de donner envie au lecteur de s'y plonger entièrement ; et puisque l'eau est fraîche, on commence par une partie heuristique simple.

32.1 UNE APPROCHE HEURISTIQUE

L'observation de Robert Brown

Le botaniste anglais Robert Brown fit paraître, en 1828, un opuscule intitulé : *A brief account of microscopical observations [...] on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules*. Cherchant à élucider, durant l'été 1827, le problème du transport de particules jusqu'à l'ovule d'une plante, il observa au microscope, de très fines particules oblongues contenues dans les grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une petite fleur rose découverte durant la fameuse expédition de Lewis & Clark, choisie parce que ces particules étaient de tailles inhabituellement grosses, et donc plus faciles à observer), et les trouva animées de mouvements désordonnés, indépendants les uns des autres et, surtout, perpétuels ; l'origine de ces mouvements lui était inconnue. Étaient-ils liés à la nature vivante d'une plante ? Il effectua des observations similaires sur d'autres espèces de plantes, puis chercha à savoir si cette propriété perdurait après la mort. Il constata successivement que :

Chapitre 33

Estimation bayésienne

Lors de la modélisation probabiliste d'une situation, il arrive qu'une probabilité p , constitutive du modèle, soit inconnue, par manque d'observations, par impossibilité de répéter l'expérience ne serait-ce qu'une seconde fois, ou toute autre raison.

L'approche bayésienne consiste alors à construire une méta-modélisation, en considérant tous les modèles possibles fondés sur le nombre p , et à postuler une loi de distribution a priori, pour la valeur de p — en général une densité $f(p)$ — qui modélise, plus ou moins précisément, les informations d'ordre psychologique que nous pensons détenir sur p (est-il proche de 0, de 1, a-t-on une bonne confiance en sa valeur ou l'imagine-t-on au contraire bien étalé dans $[0; 1]$?). Les observations effectuées permettent ensuite de modifier cette distribution, et fournissent une nouvelle évaluation de p .

Cette approche est assez fréquente mais, malgré des succès certains, parfois critiquée, notamment par les tenants d'une interprétation statistique des probabilités.

Remarque 33.1 Il convient de ne pas mélanger le *théorème de Bayes* (§ 61, page 106), qui est un théorème tout ce qu'il y a de plus solide, et nulle part contesté, et l'*approche bayésienne* des probabilités, qui consiste à utiliser des distributions a priori de p .

Distribution a priori uniforme, et distribution a posteriori

§ 459

Considérons une situation simple : un mathématicien décide d'aller visiter l'Écosse ; il a entendu dire que les moutons, noirs ou blancs, y sont nombreux et, durant son premier trajet en train dans la campagne, il scrute le paysage par la fenêtre en guettant les ovins. La proportion p de moutons blancs lui est inconnue. Une attitude possible pour lui est d'attribuer, en son for intérieur, une distribution uniforme à p , c'est-à-dire choisir une densité

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq p \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette modélisation, la variable p admet pour valeur moyenne $\hat{p} = \frac{1}{2}$. (Nous ne la notons pas « $\mathbf{E}(p)$ », réservant la notion d'espérance au procédé de calcul effectué dans un univers probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P}_p)$, où $\mathbf{P}_p$ est une mesure de probabilité

Chapitre 34

Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires

Dans ce court chapitre, nous revenons sur les successions infinies de tirages à pile ou face.

- *Dans une première partie, nous montrons que, si l'on est momentanément vainqueur dans une partie endiablée de pile ou face, alors on a de fortes chances de l'être pour longtemps !*
- *Puis, nous revenons à la nature des séries $\sum \pm 1/n$ — séries harmoniques avec une distribution aléatoire de signes, et nous montrons que : si les signes sont répartis équitablement, la série est presque sûrement convergente, mais qu'elle diverge presque sûrement dans le cas contraire.*
- *Enfin, nous montrons que le rayon d'une série entière $\sum A_n z^n$, dont les coefficients A_n sont aléatoires mais indépendants et identiquement distribués, ne saurait prendre (presque sûrement) que trois valeurs : 0, 1 et $+\infty$.*

34.1 L'INIQUITÉ FLAGRANTE D'UN JEU ÉQUITABLE

La loi de l'Arc sinus

§ 461

Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$, et notons $Y_n = 2X_n - 1$, de telle sorte que les Y_n sont des variables de Rademacher indépendantes

$$\mathbf{P}\{Y_n = +1\} = \mathbf{P}\{Y_n = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Les variables Y_n modélisent le gain de l'un des joueurs (Rosencrantz) lors d'une partie de *pile ou face* : gain de 1 € si la pièce tombe sur *pile*, gain de -1 € si elle tombe sur *face*. On note $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ le gain total à l'issue de n parties. Enfin, on note K_n le nombre de sommes $S_1, \dots, S_n$ positives ou nulles : K_n est donc

Chapitre 35

En guise de conclusion : à propos de quelques paradoxes

Crois-moi : il y a peu de raisons plus valables de faire des cauchemars que de découvrir, caché au cœur des mathématiques, le germe de la folie.

Daniel KEHLMANN, La Nuit de l'Illusionniste [58].

La plupart des paradoxes ont pour cause l'ambiguïté inhérente à toutes les langues ; le passage difficile d'un énoncé en français à un énoncé mathématique censément équivalent engendre aussi bien des résultats amusants que d'épineux problèmes. D'autres paradoxes proviennent d'un résultat rigoureusement démontré, mais non conforme à l'intuition, parfois trompeuse, comme le paradoxe des anniversaires⁽¹⁾ ; un des cas les plus classiques résulte de la confusion entre ignorance de la réalisation ou non d'un événement, et croyance en l'équiprobabilité des éventualités.

Enfin, le fameux paradoxe de Saint-Pétersbourg est typique de ce qui arrive lorsque l'on manipule des quantités infinies pour modéliser une situation qui, par nature, ne connaît que des quantités finies.

35.1 BIAIS D'ÉQUIPROBABILITÉ

Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes

On appelle *biais d'équiprobabilité* la tendance (fautive) à traduire l'absence de connaissance sur la probabilité de chacune des issues possibles d'une expérience par l'équiprobabilité entre ces issues.

§ 466

(1). Présenté dans l'exercice 1.1 page 50.

Annexe A

Éléments d'analyse et d'algèbre

On résume ici quelques points d'analyse et d'algèbre utilisés dans l'ouvrage : suites, séries, familles sommables, suites de fonctions, séries entières, fonctions dérivables, convexité, pseudo-inverse, calcul intégral, calcul dans les espaces de Hilbert, transformation de Fourier, théorème spectral notamment.

A.1 SUITES

Fini, dénombrable, indénombrable

Un ensemble A est dit (**strictement**) **dénombrable** s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ (que l'on appelle un **dénombrement**). En d'autres termes, on a pu *numéroter* tous les éléments de A par des entiers, c'est-à-dire écrire $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$, en notant plus commodément $a_n := \varphi(n)$. ♦ On dit souvent d'un ensemble qu'il est **dénombrable** pour indiquer qu'il est *fini* ou *strictement dénombrable*. ♦ Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. ♦ Si A est un ensemble et D un ensemble dénombrable, et s'il existe une injection $\varphi : A \rightarrow D$, alors A est dénombrable. ♦ De même, s'il existe une surjection $\psi : D \rightarrow A$ et si D est dénombrable, alors A est dénombrable. ♦ Si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ l'est également. ♦ Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont évidemment dénombrables. En revanche, $[0; 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$,... ne le sont pas. Deux cas particuliers interviennent fréquemment :

■ **Proposition A.1** $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION : À tout couple (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on peut associer un rationnel r ; l'application $(p, q) \mapsto r$ ainsi définie est une *surjection* de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable. ■

■ **Proposition A.2** L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION : Suivons l'argument classique de la *diagonale de Cantor* et supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pour chaque entier n , notons

$$\varphi(n) =: (\varepsilon_0(n), \varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots).$$

Annexe B

Davantage sur la mesure

Donnons ici quelques compléments sur les tribus et les fonctions mesurables.

- Nous commençons par passer en revue les divers boréliens utiles en théorie des probabilités : boréliens de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$, puis boréliens de $\mathbb{R}^T$ où T est un ensemble dénombrable (A 67, utile pour le jeu de pile ou face par exemple) ou non dénombrable (A 68, utile pour les processus à temps continus comme le mouvement brownien).
- Après quelques définitions générales sur les fonctions mesurables, nous démontrerons le théorème de factorisation des fonctions mesurables par rapport à la tribu $\sigma(X)$.
- Nous terminons le chapitre par un rapide tour d'horizon des techniques liées au lemme de classe monotone, et qui sont d'une très grande puissance. Une description complète de la mesure $\mathbf{P}$ sur chacun des éléments de $\mathfrak{T}$ étant, en pratique, impossible, on montre qu'il suffit de la définir sur un ensemble $\mathfrak{A}$ plus réduit — le but étant évidemment de chercher l'ensemble $\mathfrak{A}$ le plus petit possible :
 - pour définir $\mathbf{P}$ ex nihilo, on la définit d'abord sur une algèbre $\mathfrak{A}$ engendrant $\mathfrak{T}$;
 - si au contraire on suppose que $\mathbf{P}$ existe, alors elle est caractérisée par ses valeurs prises sur une structure encore plus simple (un π -système).

B.1 BORÉLIENS

Boréliens de $\mathbb{R}$

Tout d'abord, une petite remarque d'ordre topologique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation d'équivalence « $\sim$ » par : $x \sim y$ si et seulement si le segment $[x; y]$ est inclus dans U . La classe d'équivalence d'un élément x de U est donc un intervalle ouvert. L'ensemble U est la réunion disjointe de ses classes d'équivalence modulo $\sim$; si l'on choisit, dans chaque classe d'équivalence, un représentant *rationnel*, on a donc montré que :

■ **Lemme B.1** *Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

Annexe C

Théorèmes d'existence

En d'innombrables occasions, nous avons formulé des hypothèses du genre : « soit X une variable aléatoire suivant telle loi », ou encore « soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ». Diantre ! A-t-on effectivement le droit de le faire ? Après avoir donné des exemples élémentaires de théorèmes d'existence, nous présentons le théorème de Kolmogorov qui les généralise et qui permet, notamment, de fabriquer des suites de variables aléatoires de lois conjointes imposées, ou bien de suites de variables aléatoires indépendantes de lois marginales imposées.

C.1 QUELQUES EXEMPLES SIMPLES DE THÉORÈMES D'EXISTENCE

Existence d'une variable aléatoire de loi donnée

A 78

Le problème le plus simple que l'on se pose est : si l'on se donne une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ convenable, existe-t-il *effectivement* une variable aléatoire qui admette F comme fonction de répartition ?

■ **Théorème C.1 (Théorème de réalisation)** *Soit F une fonction croissante, continue à droite et admettant les limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que F soit la fonction de répartition de X .*

En d'autres termes, si l'on se donne une « loi de variable aléatoire », alors on peut réaliser cette loi au moyen d'une variable aléatoire.

Le démonstration est aisée dans son principe : on choisit pour espace $\Omega := \mathbb{R}$, et on définit la probabilité $\mathbf{P}$ par sa valeur sur les intervalles $]-\infty; x]$ par $\mathbf{P}(]-\infty; x]) := F(x)$. On choisit enfin comme tribu la tribu $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ des boréliens. Le fait d'avoir défini $\mathbf{P}$ sur les intervalles $]-\infty; x]$ permet d'étendre, de manière unique, $\mathbf{P}$ à toute la tribu engendrée par ces intervalles, à savoir justement la tribu $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ des boréliens⁽¹⁾. Il ne reste plus qu'à définir la variable X comme l'identité :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad X(\omega) = \omega.$$

⁽¹⁾. Rappelons qu'il s'agit essentiellement d'utiliser le théorème de Carathéodory, après avoir défini $\mathbf{P}$ sur l'algèbre $\mathfrak{A}$ des unions finies disjointes d'intervalles $]a; b]$, et après avoir prouvé que $\mathbf{P}$ ainsi étendue est σ -additive sur $\mathfrak{A}$.

Annexe D

Lexique français-anglais

français	anglais
absolument continue	<i>absolutely continuous</i>
aléatoire	<i>random</i>
algèbre	<i>algebra, field</i>
atome	<i>atom</i>
biais	<i>bias</i>
borélien	<i>Borel set</i>
branchement (processus de)	<i>branching process</i>
classe monotone	<i>monotone class, d-system, λ-system, Dynkin system</i>
coefficient d'aplatissement	<i>kurtosis</i>
coefficient de corrélation	<i>(linear) correlation coefficient</i>
convergence en loi / étroite	<i>convergence in law/distribution</i>
convergence étroite	<i>weak convergence</i>
convergence en probabilité	<i>convergence in probability</i>
convergence presque sûre	<i>almost sure convergence</i>
covariance	<i>covariance</i>
dé équilibré	<i>fair dice</i>
degré de liberté (d.d.l.)	<i>degree of freedom (d.o.f.)</i>
dénombrable	<i>countable, enumerable</i>
densité de probabilité	<i>density function</i>
— conjointe, marginale	<i>joint, marginal —</i>
écart type	<i>standard deviation</i>
échantillon	<i>sample</i>
épreuve ω	<i>sample point</i>
équiprobables	<i>equally likely</i>
espace des épreuves	<i>sample space</i>
espérance	<i>expectation, expected value, mean value</i>
estimateur sans biais	<i>unbiased estimator</i>
estimateur convergent	<i>consistent estimator</i>
événement	<i>event</i>
fonction de répartition	<i>(cumulative) distribution function c.d.f.</i>
— conjointe, marginale	<i>joint, marginal —</i>
hypothèse nulle	<i>null hypothesis</i>

Index

Les numéros de page en **gras** renvoient aux définitions principales, ceux en *italique* à des exercices. Les noms en PETITES CAPITALES renvoient aux indications biographiques. Les numéros de page précédés par la lettre « H » renvoient à des définitions données dans la partie « Heuristique », qui peuvent être plus informelles que les autres.

Symboles

0–1	
loi du — de Borel	119
loi du — de Kolmogorov	447
$\mathbf{1}_A$	135
$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$	383
$\mathfrak{B}^\infty$	735
$\mathfrak{B}^n$	735
Γ (fonction d'Euler)	628, 711
Γ (loi —)	243, 287
Ω	[H34]
χ^2 (loi du —)	243
δ_a (mesure de Dirac)	86, 95
γ (loi —)	243
simulation	564
ω	[H34]
π - λ (théorème —)	740
π -système	739
— et indépendance	741
$\preccurlyeq$	737
$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$	446
$\sigma(X)$	367
$\sigma(\mathfrak{F})$	83
σ -additivité	[H45], 86
σ -algèbre	81
σ -finie (mesure —)	743
σ -sous-additivité	89, 99
$\sim$ ($u_n \sim v_n$)	705
$\otimes$ (produit direct/tensoriel)	271
$\otimes$ (tribu produit)	735
ζ (fonction — de Riemann)	541, 620

A

Absolument continue	
densité —	96
fonction —	711
mesure —	743
variable aléatoire —	232
Absorbant	
classe —e	596
état —	596
Accroissements	
indépendants	639
stationnaires	639
Adaptée (suite — à une filtration)	517
Additive	87
σ -additive	[H45], 86
sous-additive	87
Adjoint d'un endomorphisme	729
Aiguille de Buffon	568
Aléa	[H34]
Aléatoire	
matrice —	365, 619
série entière —	686
variable —	voir Variable aléatoire

Alembert (erreur de d'—)	[H39]
Algèbre	80
engendrée	81
sans atomes	98
Anniversaires (paradoxe des —)	50
Aplatissement	260
Application mesurable	[H60], 317, 736
Approximation	
binomiale par normale	483
binomiale par Poisson	482
Poisson par normale	485
Arc sinus (loi de l'—)	249, 430, 681
Arrêt (temps d'—)	376 , 601
Asymétrie (coefficient d'—)	260
Asymptotique (tribu —)	445
Atome	81
algèbre sans —s	98
d'une partition	504
tribu sans —s	99
Atomique (événement)	[H34]
Atteinte (temps d'—)	601
Autoadjoint (endomorphisme —)	730
Avant (un pas en —)	51, 213, 217, 603 , 609, 610
Avogadro (constante d'—)	664
Axiomes	
1 à 3	86
3', 3'' et 3'''	88

B

B(a, b) (loi bêta)	243
$\mathcal{B}(n; p)$	voir Binomiale (loi)
$\mathcal{B}(p)$	135
Baguette brisée	286
Banach (espace de —)	729
Base hilbertienne	724
Bayes (formule de —)	106, 107
version continue	281
Benford (loi de —)	580
Bernoulli	
loi de —	135
épreuve de —	135
Bernstein	
formule de —	529
inégalité de —	354
théorème de —	536
Bertrand (série de —)	705
Biais d'un estimateur	496
Bienaymé (égalité de —)	190, 278, 376
Bienaymé-Tchebychev (inéq. de —)	161, 261, 353
d'ordre k	353
Bilatérale (loi exponentielle —)	288
Binomial (coefficient —)	726
Binomiale (loi —)	136
approximation par Poisson	482
approximation par une loi normale	483
calcul de l'espérance	151
Boltzmann	
facteur de —	66, 627
formule de —	630
Boole	
algèbre de —	80
inégalité de —	89, 99

- Borel
 lemmes de — -Cantelli 119, 297
 loi du 0-1 de — 119
 théorème des nombres normaux de — 225
 Borélienne (fonction —) 736
 Boréliens
 de $\mathbb{C}$ 383
 de $\mathbb{R}$ 83, **733**
 de $\mathbb{R}^n$ 358, **735**
 Borne inférieure/supérieure 81
 BORTKIEWICZ Władisław 139
 Boson [H41], 632
 Boule ouverte 729
 Box-Muller (méthode de —) 555
 Branchement (processus de —) 199
 Brownien voir Mouvement
 Bruit de grenaille 641
 BUFFON, comte de 568
 Buffon (aiguille de —) 568
 BYWATER John 646
 Bêta (loi —) 243
- C**
- Cantelli
 inégalité de — 299
 lemmes de Borel- — 119, 297
 loi forte 464, 466
 théorème de Glivenko- — 457
 Cantor
 diagonale de — 703
 fonction de — 714
 Caractéristique
 fonction — 298
 Caractéristique (fonction —) 384
 Carathéodory (théorème de —) 97, **743**
 Cauchy
 loi de — 242
 somme de variables de — 389
 produit de — 720
 suite de — 704
 Cauchy-Schwarz (inégalité de —) 159, 257, **347**, 360
 dans un espace préhilbertien 723
 Causalité 492
 Cavalerie Légère 343
 Central (théorème-limite —) **472**, 477
 Centré
 moment — **340**
 d'une variable à densité 255
 d'une variable discrète 155
 variable — e 159, 260
 Chaîne de Markov 203, **586**
 Chaleur (équation de la —) 649
 Champernowne (nombre de —) 226
 Changement de variable 722
 aléatoire 245
 Chapeaux (problème des —) 151
 Chapman-Kolmogorov (équation de —) 591, 650
 Chenille 51, 610
 Cigogne (effet —) 493
 Classe
 absorbante 596
 fermée 596
 indécomposable 595
 récurrente 601
 transitoire 601
 Classe monotone 739
 engendrée 740
 lemme de — 740
 Coalitions (lemme des —)
 cas discret 183
 cas à densité 273
 (démonstration) 742
 pour des tribus 369, **741**
 pour des variables aléatoires **370**, **741**
 Cochran (théorème de —) 405
 Coefficient
 d'asymétrie 260
 binomial 726
 de corrélation 191, 278, 359
 Collectionneur (problème du —) 152, **166**
 Communicants (états —) 593
 Commutativement convergente (série —) 707
 Comparaison de séries positives 706
 Complet
 espace probabilisé — 90
 espace vectoriel normé — 729
 système — 91
 système — induit par X 130
 système quasi- — 91
 tribu complète 90
 Complexion 625
 Composées (th. des probabilités —) [H48], 105
 Conditionnelle
 densité — 280
 espérance voir Espérance
 probabilité — [H47], 104
 sachant une partition 521
 sachant une tribu 522
 sachant une v.a. 522
 Confiance (intervalle de —) 497
 Conjointe
 densité — 266
 fonction de répartition — 265
 loi —
 cas discret 178
 cas à densité 265
 Continue
 fonction — à droite 710
 fonction absolument — 711
 fonction uniformément — 710
 variable aléatoire — 232
 Continuité
 correction de — 483
 monotone 88
 radiale (lemme d'Abel) 720
 théorème de — 388, 425, **427**
 Convergence
 commutative 707
 dominée (th. de — discret) 168, 710
 dominée (th. de —) 342
 étroite 419, **421**
 dans L^p 419
 en loi **419**, 421
 monotone 341
 (démonstration) 355
 en moyenne 418
 presque sûre **412**, 453
 en probabilité **414**, 452
 simple 718
 d'une suite de parties 118
 uniforme 718
 Convergent (estimateur —) 496
 Convolution
 des densités 375
 de distributions de Dirac 375
 des fonctions de répartition 374
 formule de — 374
 formule de — discrète 186
 des mesures de probabilité 374
 Correction de continuité 483
 Corrélation
 et causalité 492
 coefficient de — 191, 278, 359
 Coupon collector's problem 152, **166**

Covariance	348
d'un couple à densité	277
d'un couple discret	187
matrice de —	359
changement de base	360
Cramér (modèle de —)	578
Crible (formule du —)	91
Critère de Weyl	432
Croissance (propriété de —)	
pour les probabilités	87
pour les tribus	84
Cylindre	210, 658, 735 , 751
D	
d'Alembert (erreur de —)	[H39]
de Moivre (théorème de — Laplace)	483
de Morgan (règles de —)	38
Décomposition de Lebesgue	324, 714
Décorrélacion	351
Décorrélées (variables aléatoires —)	188
Demi-vie	259
Dénombrable	703
Dénombrablement additive	[H45]
Dénombrement	703
Densité	
conditionnelle	280
conjointe	266
au sens des distributions	325
marginale	269, 361
d'une mesure	743
d'une partie de $\mathbb{N}$	297
d'une probabilité	96
sur $\mathbb{R}^n$	358
d'une variable aléatoire	[H64], 232
d'un vecteur gaussien	403
Dés non transitifs	698
Destin	[H34]
Déterministe	
système —	[H33]
variable —	33 , 378
Diagonale de Cantor	703
Diagramme en bâtons	133
Diffuse (loi —)	232
Dini (théorème de —)	718
Dirac	
convolution de distributions de —	375
distribution de —	325, 726
mesure de —	86, 95
Dirichlet	
problème de —	605, 664
théorème de —	707
Discontinuité	
de 1 ^{re} / de 2 ^e espèce	712
saut de —	132, 321, 713
Discrete	
tribu —	81
variable aléatoire —	[H63], 129
Distribution	725
de Dirac	325, 726
convolution	375
de Maxwell-Boltzmann	66, 629
Dominée (th. de convergence —)	342
cas discret	168, 710
Doob	
inégalité des remontées	520
lemme de — -Dynkin	512, 737
Droite de régression	398, 490
Durée de vie	259
Dynkin	
lemme de Doob- —	512, 737
théorème de —	740
Dés non transitif	698

E

$\mathcal{E}(\alpha)$	238
Écart-type	340
d'une variable à densité	256
d'une variable discrète	158
Échec	135
Effet cigogne	493
Égalité	
de Bienaymé	190, 278, 376
de Parseval	724
Ehrenfest (modèle des urnes d'—)	608
EINSTEIN Albert	664
Élection (théorème du scrutin)	299
Élimination (processus d'—)	298
Empirique	
fonction de répartition —	456
moyenne —	494
Endomorphisme autoadjoint	730
Endomorphisme orthogonal	730
Engendrée	
algèbre —	81
classe monotone —	740
tribu —	83, 367, 446
Entropie	630
Épreuves (espace des —)	[H34], 84
Équation	
de la chaleur	649
de Chapman-Kolmogorov	591, 650
Équidistribuée (suite —)	431
ERDŐS Paul	216
Erdős-Kac (théorème d'—)	615
Ergodique	
matrice / chaîne —	598, 731
théorème —	599, 731
Erreur	
de d'Alembert	[H39]
fonction d'— « erf »	240
Espace	
de Banach	729
des épreuves	[H34], 84
euclidien	729
mesurable	84
probabilisable	84
probabilisé	86
vectoriel normé	729
complet	729
Espérance	
calcul pratique	151
conditionnelle	
sachant une partition	504
sachant une tribu	511
sachant une v.a.	512
sachant une v.a. discrète	194, 195,
508	
sachant une v.a. à densité	285
définition générale	337
définition alternative	326, 327
expression alternative ...	153, 169, 362
infinie	335, 337
(cas discret)	149
linéarité	338
cas discret	150
totale (formule de l'—)	194
d'une v.a. complexe	337, 383
d'une v.a. discrète	[H73], 145
d'une v.a. à densité	[H74], 253
d'une v.a. simple	334
d'une v.a. positive	335
Estimateur	496
Estimation de Hardy & Littlewood	299
Étagée	<i>voir</i> Simple

- État
 —s communicants 593
 absorbant 596
 final 596
 microscopique 624
 périodique 597
 récurrent 601
 transitoire (transient) 601
ETEMADI (Nasrollah —) 460
Étroite (convergence —) 419, **421**
Euclidien (espace —) 729
Euler
 constante d'— -Mascheroni 705
 fonction Γ d'— 628, 711
 identité d'— 541
 indicatrice d'— 541
Événement [H35], **84**
 atomique [H34]
 —s incompatibles 84
 —s indépendants 114
 —s mutuellement indépendants 115
 négligeable [H38], 89
 presque sûr [H38], 89
 de queue 445
 récurrent 215
 régénératif 214
 symétrique 448
 transient 215
Expérience (résultat d'une —) [H34]
Exponentielle
 bilatérale (loi —) 288
 loi — [H64], **238**
 lien avec la loi de Poisson .. 249, 548
 simulation 549
Extension (th. d'— de Kolmogorov) 750
- F**
- Face (trois — d'affilée) 51
Facteur de Boltzmann 66, **627**
Factoriel (moment —) 169
Factorisation (lemme de —) 512, 737
Faible (loi — des grands nombres) .. 219, **452**
 de Khintchine 453
Famille sommable 708
Fatou
 inégalités de — 126
 lemme de — 341
FELLER William 216
Fermé 729
 classe —e 596
Fermion 632
Feu tricolore (temps d'attente) 322, 381
Filtration 517
Final (état —) 596
Fluctuation (intervalle de —) 497
Fonction
 Γ d'Euler 628, 711
 borélienne 736
 de Cantor 714
 caractéristique 298, 384
 d'erreur 240
 génératrice 163
 de Haar 662
 harmonique 605
 indicatrice d'un événement 135
 mesurable [H60], 317, 736
 de Rademacher 224
 de répartition [H60], 132
 conjointe 265
 d'une probabilité sur $\mathbb{R}$ 93
 empirique 456
 de Schauder 662, 673
 singulière 323, 713
 —test 725
 uniformément continue 710
 à variation bornée 711
Formule
 de Bayes 106, 107
 version continue 281
 de Bernstein 529
 de Boltzmann 630
 de convolution 186, 374, **375**
 du crible 91
 de l'espérance totale 194
 de König-Huygens 157, 256, **340**
 de Poincaré 91
 des probabilités composées [H48], 105
 des probabilités totales [H47], 105
 de Stirling 705
 preuve probabiliste 531
 de transfert **344**
 pour un couple discret 180
 pour un couple à densité 271
 pour une variable discrète 155
 pour une variable à densité 254, 346
 de Vandermonde 142, 727
Forte (loi — des grands nombres) 219, **453**, 455
 cas L^2 466
 cas L^4 (démonstration de Cantelli) . 466
 (démonstration d'Etemadi) 460
 (démonstration de Pratelli) 463
Forte (propriété de Markov —) 601
Fortement irréductible (matrice —) . 598, 731
Fortune
 comment gagner des —s 376
 Dame — [H34]
Fourier (transformée de —)
 d'une mesure) 384
 d'une variable aléatoire 298
Frobenius (théorème de Perron- —) . 599, 731
Fubini (théorème de —)
 cas général 361, 721
 pour les séries doubles 708, 709, 732
- G**
- $\mathcal{G}(p)$ 136
Galton
 paradoxe de — 698
 processus de — -Watson 199
Gamma
 fonction Γ d'Euler 628, 711
 loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ 243, 287
gamma (loi $\gamma(\nu)$) 243
 simulation 553, 564
Gaussien
 loi —ne voir Loi normale
 variable —ne 392
 vecteur — 400
Génératrice (fonction —) 163
Géométrique (loi —) **136**
 max de n — 298
 simulation 547
Germe de probabilité [H42]
GIBBS Willard 624
Gibbs (paradoxe de —) 630
Glivenko-Cantelli (théorème de —) 457
GOUY Louis Georges 646
Grands nombres
 loi faible des — 219, **452**
 de Khintchine 453
 loi forte des — 219, **453**, 455
 cas L^2 466
 cas L^4 (démonstration de Cantelli) 466
 (démonstration d'Etemadi) 460
 (démonstration de Pratelli) 463

Grenaille (bruit de —) 641
 Grenouille (paradoxe des —) 287
 Grossière
 divergence — 705
 tribu — 81
 Guildenstern & Rosencrantz 27
 Gumbel (loi de —) 169

H

Haar (fonctions de —) 662
 Hardy (estimation de — -Littlewood) 299
 Harmonique
 fonction — 605
 nombre — 166
 série — 705
 Heine (théorème de —) 710
 Hewitt-Savage (loi du tout ou rien de —) 448
 Hilbertienne (base —) 724
 Hoeffding (inégalité de —) 467
 Hölder (inégalités de —) 170
 Huygens (théorème de König- —) 157,
 256, **340**
 Hypergéométrique (loi —) 141
 Hypothèse de Riemann 620

I

Identité
 d'Euler 541
 de Wald 197, 377
 Image
 probabilité — 320
 réciproque d'une partie 60
 Indépendance
 accroissements indépendants 639
 de deux événements 114
 mutuelle
 de classes d'événements 369
 d'événements 115
 de tribus 369
 de variables aléatoires **370**
 de variables discrètes 182
 de variables à densité 272
 représentation graphique 368, 380
 de deux v.a. **367, 368**
 à densité 271
 discrètes 181
 Indicatrice
 d'Euler 541
 fonction — d'un événement 135
 Inégalité
 de Bernstein 354
 de Bienaymé-Tchebychev 161, 261, **353**
 d'ordre k 353
 de Boole 89, 99
 de Cantelli 299
 de Cauchy-Schwarz 159, 257, **347**,
 360, 723
 de Doob 520
 de Fatou 126
 de Hoeffding 467
 de Hölder 170
 de Jensen 298, 354, 511, 718
 de Lyapounov 355
 de Markov **352**
 pour une v.a. à densité 261
 pour une v.a. discrète 161
 pour une v.a. discrète 170
 maximale de Kolmogorov 684
 de Paley-Zygmund 688
 des remontées de Doob 520
 triangulaire 706
 inf 81

Infiniment souvent 116
 Initiale (loi —) 586
 Inspection (paradoxe de l'—) 74, 643
 Instantanée (loi —) 590
 Intégrable (v.a. —) **337**
 cas discret 149
 cas positif 335
 cas à densité 253
 Intégrale
 gaussienne 723
 de Paley-Wiener-Zygmund 673
 selon une mesure de probabilité 334-340
 Intégration terme à terme 154, 342
 Intervalle
 de confiance 497
 de fluctuation 497
 Invariante (loi, probabilité, mesure —) 591
 Irréductible
 matrice fortement — 598, 731
 matrice, chaîne — 596, 731
 i.s. (infiniment souvent) 116
 Itéré (loi du logarithme —) 478

J

Jacobien 722
 Jensen (inégalité de —) 298, 354, 511, 718
 Jeu non transitif 697
 Joker [H43]
 Jumeaux (entiers « premiers ») 583

K

Kac (théorème d'Erdős- —) 615
 KAKUTANI Shizuo 666
 Khintchine (théorème de —) 453
 Kolmogorov
 axiomes de — 86
 équation de Chapman- — 591, 650
 inégalité maximale de — 684
 loi des grands nombres de — **453**, 455
 loi du tout ou rien de — 447
 test de — -Smirnov 458
 théorème d'extension 750
 König-Huygens (théorème de —) 157,
 256, **340**
 Kurtosis 260

L

$\mathcal{L}^0$ ou $\mathcal{L}^0(\Omega)$ 317
 $\mathcal{L}_b^0(\Omega)$ 317
 $\mathcal{L}_+^0(\Omega)$ 317
 L^1 339
 $\mathcal{L}^1$ [H73], 337
 L^2 347
 $\mathcal{L}^2$ 347
 L^p 350
 Lachesis [H34]
 Lagrange (multiplicateurs de —) 723
 Laplace
 — -Gauss (loi de —) 239
 théorème de de Moivre- — 483
 transformée de — d'une v.a. 299
 $\mathcal{L}^p$ 340
 Lebesgue
 décomposition de — 324, 714
 mesure de — sur $[0; 1]$ 94
 tribu de — 90
 LEEUWENHOEK Antoni 646
 Lemme
 d'Abel 720
 de — -Cantelli 297
 de Borel-Cantelli 119
 de classe monotone 739, **740**

- des coalitions
 - cas discret 183
 - cas à densité 273
 - (démonstration) 742
 - pour des tribus 369, **741**
 - pour des variables aléatoires **370, 741**
 - de Doob-Dynkin 512, 737
 - de factorisation 512, 737
 - de Fatou 341
 - des moments 404
 - Lévy (théorème de —) 388, **427**
 - lim inf et lim sup 116
 - Limite
 - inférieure/supérieure 116
 - d'une suite de parties 118
 - d'une suite monotone de parties 82
 - théorème — central **472, 477**
 - Limites
 - lim $\uparrow$, lim $\downarrow$ 82
 - Littlewood (estimation de Hardy- —) 299
 - Logarithme (loi du — itéré) 478
 - Loi [u58], **320**
 - a priori/a posteriori* 281
 - de l'Arc sinus 430, **681**
 - de Benford 580
 - de Bernoulli 135
 - binomiale 136
 - approximation normale 483
 - approximation par Poisson 482
 - calcul de l'espérance 151
 - bêta $B(a, b)$ 243
 - de Cauchy 242
 - somme de variables de — 389
 - conditionnelle
 - cas discret 179, 193
 - cas à densité 279
 - conjointe
 - cas discret 178
 - cas à densité 265
 - convergence en — 419, 421
 - du demi-cercle 430
 - diffuse 232
 - exponentielle [u64], 238
 - lien avec la loi de Poisson .. 249, 548
 - simulation* 549
 - somme de deux v.a. 287
 - faible des grands nombres 219, **452**
 - de Khintchine 453
 - forte des grands nombres . 219, **453, 455**
 - cas L^2 466
 - cas L^4 (démonstration de Cantelli) 466
 - (démonstration d'Etemadi) 460
 - (démonstration de Pratelli) 463
 - Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ 243, 287
 - gamma $\gamma(\nu)$ 243
 - simulation* 553, 564
 - gaussienne voir Loi normale
 - géométrique **136**
 - max de n v.a. 298
 - simulation* 547
 - de Gumbel 169
 - hypergéométrique 141
 - initiale 586
 - instantanée 590
 - invariante 591
 - du χ^2 243
 - du logarithme itéré 478
 - marginale
 - cas discret 178, 179
 - cas à densité 266, 361
 - normale **239**
 - quotient de deux v.a. 274
 - simulation* 554
 - somme de deux v.a. 274
 - des petits nombres 139
 - de Poisson 138
 - approximation normale 485
 - lien avec l'exponentielle 249, 548
 - mode d'une — 143
 - simulation* 548
 - du premier succès 136
 - de Rayleigh 555
 - sans mémoire 138, 238
 - du tout ou rien
 - de Borel 119
 - de Hewitt-Savage 448
 - de Kolmogorov 447
 - uniforme
 - discrète 135
 - à densité 237
 - d'une variable aléatoire **320**
 - Lyapounov (inégalités de —) 355
- M**
- Marche aléatoire
 - discrète 646
 - limite continue 647, 648
 - sur $\mathbb{Z}$ 220
 - sur $\mathbb{Z}$, asymétrique 299
 - Marginale
 - s d'un couple 179, 266
 - densité — 269, 361
 - loi —
 - cas discret 178, 179
 - cas à densité 266, 361
 - Markov
 - chaîne de — stationnaire 203, 586
 - inégalité de — **352**
 - pour une v.a. à densité 261
 - pour une v.a. discrète 161, 170
 - processus de — 661
 - propriété de — 586
 - propriété de — forte 601
 - Martingale 516, **517**
 - Masse de Dirac 86, **95**
 - Matching problem* 151
 - Maternité (nuits agitées à la —) 498
 - Matrice
 - aléatoire 365, 619
 - de covariance 359
 - changement de base 360
 - ergodique 598, 731
 - fortement irréductible 598, 731
 - irréductible 596, 731
 - jacobienne 722
 - positive 589, 730
 - régulière 598, 731
 - stochastique **586, 589, 730**
 - symétrique définie positive 730
 - symétrique positive 730
 - de transition 586
 - Maximale (inégalité — de Kolmogorov) .. 684
 - Maximum
 - de variables aléatoires ... 275, 287, 288, 355
 - géométriques 298
 - presque exponentielles 300
 - de vraisemblance 679
 - MAXWELL James Clerk 624
 - Maxwell-Boltzmann (distrib. de —) .. 66, 629

Médiane d'une v.a. à densité 236
 Mémoire (loi sans —) 138, 238
 Menteurs (la chaîne des —) 51
 Mesurable
 espace — 84
 fonction — [H60], 317, 736
 selon une partition 509
 selon une tribu 512, 737
 un ensemble non — 97
 Mesure
 σ -finie 743
 absolument continue 743
 de Dirac 86, **95**
 de Lebesgue sur $[0; 1]$ 94
 produit 358
 de Wiener 657
 Méthode
 de Box-Muller 555
 de Box-Muller avec rejet 556
 de Miller-Rabin 574
 de Monte-Carlo voir Monte-Carlo
 « un pas en avant » .. 51, 213, 217, **603**,
 609, 610
 du rejet 455, **550**, 572
 Métro (temps d'attente du —) 282
 Middle-square (algorithme —) 560, 564
 Miller
 méthode de —-Rabin 574
 témoin de — 575
 théorème de — 575
 Mixte (variable aléatoire —) 322
 Mode 143
 Modèle de Cramér 578
 Moment **340**
 centré **340**
 d'une variable à densité 255
 d'une variable discrète 155
 d'une variable à densité 255
 d'une variable discrète 155
 factoriel 169
 lemme des —s 404
 problème des —s 301
 récupération des —s 165
 Monotone
 classe — 739
 engendrée 740
 lemme de classe — 740
 théorème de convergence — 341
 (démonstration) 355
 Monte-Carlo (méthode de —) **567**
 pour calculer une intégrale 570
 pour estimer une moyenne 568
 pour le problème de Dirichlet 664
 pour la primalité 574
 pour effectuer un tri 579
 Morgan (règles de de —) 38
 Mouvement brownien
 construction canonique 658
 covariance 659
 définition 655
 existence 656
 loi (mesure de Wiener) 657
 Moyenne
 empirique 494
 règles de la valeur — 604, 605
 Multiplicateurs de Lagrange 723
 Multivariée (distribution normale —) 400
 Mutuellement indépendants (évts. —) 115

N

$\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ 239
 Naissances 74
 NEEDHAM John Turberville 646
 Négligeable [H38], **89**
 NEWCOMB Simon 580
 Nikodým (théorème de Radon- —) 743
 Nombre
 de Champernowne 226
 normal 225, 532
 —s de Stirling 165, **727**
 Normal (nombre —) 225, 532
 Normale (loi —) **239**
 quotient de deux v.a. 274
 simulation 554
 somme de deux v.a. 274
 Norme 729
 Nornes [H34]

O

O, o 705
 Observable 84
 Ordre (statistique d'—) 365
 Orthogonal (endomorphisme —) 730
 Orthonormée (famille — de L^2) 351
 Ouvert 729

P

$\mathcal{P}(\lambda)$ 138
 Paley-Wiener-Zygmund (intégrale de —) . 673
 Paley-Zygmund (inégalité de —) 688
 Paquets (th. de sommation par —) 710
 Paradoxe
 des anniversaires 50
 de Galton 698
 de Gibbs 630
 des grenouilles 287
 de l'inspection 74, 643
 de Walter Penney 609, 697
 de Saint-Petersbourg 694
 téléphonique 365
 Parseval (égalité de —) 724
 Partie
 fermée 729
 ouverte 729
 positive/négative 149, **336**
 singulière 323, 713
 Pas (un — en avant) 51, 213, 217, **603**,
 609, 610
 Penney (paradoxe de W. —) 609, 697
 Périodique (état —) 597
 PERRIN Jean 664
 Perron (théorème de —-Frobenius) . 599, 731
 Petits nombres (loi des —) 139
 π -système 739
 — et indépendance 741
 Poincaré (formule de —) 91
 Points d'un processus 638
 Poisson
 loi de — 138
 approximation normale 485
 lien avec l'exponentielle ... 249, 548
 modes d'une — 143
 simulation 548
 processus de — 638
 Pólya (théorème de récurrence) 661
 Polynômes de Bernstein 536
 Positive (matrice —) 589, 730
 PRATELLI (Luca —) 463
 Presque sûr [H38], 89
 convergence presque sûre **412**, 453

- Presque sûrement [H38]
 $(X_n)_{n \geq 1} \rightarrow X$ p.s. **412**, 453
 Primalité (tests probabilistes de —) 574
 Probabilisable (espace —) 84
 Probabilité **86**
 —s composées (th. des —) [H48], 105
 conditionnelle [H47], **104**
 sachant une partition 521
 sachant une v.a. discrète 522
 convergence en — **414**, 452
 image [H59], 320
 invariante 591
 produit 358, 736
 —s totales (formule des —) ... [H47], 105
 de transition 586
 Problème
 des chapeaux (des conjoints) 151
 du collectionneur 152, **166**
 de Dirichlet 605, 664
 des moments 301
 Processus
 de branchement 199
 de comptage 638
 d'élimination 298
 de Galton-Watson 199
 markovien 661
 de Poisson 638
 stochastique 638
 Produit
 de Cauchy 720
 direct/tensoriel 271
 probabilité — 358, 736
 tribu — 358, 735
 Programme (en environnement instable) . 378
 Projection orthogonale 723
 Propriété
 de Markov 586
 de Markov forte 601
 Pseudo-inverse d'une fonction croissante.. 715
- Q**
- Quadratique (risque —) 496
 Quasi-complet (système —) 91
 Queue (événement de —) 445
 Quotient de deux v.a. normales 274
- R**
- Rabin
 méthode de Miller- — 574
 théorème de — 576
 Rademacher
 fonctions de — 224
 suite de — 211
 Radial (lemme de continuité —e d'Abel) . 720
 Radon (théorème de — -Nikodým) 743
 Rang d'un cylindre 210
 Rayleigh (loi de —) 555
 Rayon d'une série entière 719
 aléatoire 686
 Réalisation (théorème de —) 747
 Réarrangement 365
 Réciproque (image — d'une partie) . [H60], 318
 Recuit simulé 579
 Récupération des moments 165
 Récurent
 (mouvement brownien) 661
 classe —e 601
 état — 601
 événement — 215
 Réduite (variable —) 159, 260
 Régénératif (événement —) 214
- Règles
 de de Morgan 38
 de la valeur moyenne 604, 605
 Régression (droite de —) 398, **490**
 Régulière (matrice / chaîne) 598, 731
 Rejet (méthode du —) 455, 550
 Remontées (inégalité des —) 520
 Répartition (fonction de —) ... [H60], 132, **320**
 d'un couple à densité 265
 empirique 456
 d'une probabilité sur $\mathbb{R}$ 93
 Résultat d'une expérience [H34]
 Retour
 temps de — 601
 temps moyen de — 603
 Riemann
 fonction ζ de — 541, 620
 hypothèse de — 620
 Riesz-Fisher (théorème de —) 349
 Risque quadratique 496
 Rosencrantz & Guildenstern 27
 Ruine du joueur 51
- S**
- Saint-Petersbourg (paradoxe de —) 694
 Saut de discontinuité 132, 321, **713**
 Schauder (fonctions de —) 662
 Scrutin (théorème du —) 299
 Séparable (tribu —) 90
 Séquence
 homogène 211
 de trois *face* 51
 Série
 aléatoire 449, 683
 de Bertrand 705
 entière 719
 aléatoire 533, 686
 harmonique 705
 de variables positives 341
 Silhouette d'une matrice 594
 Simple (convergence —) 718
 Simple (variable aléatoire —) 129, 328
 espérance 334
 Simulation
 d'une loi continue 549
 d'une loi exponentielle 549
 d'une loi $\gamma(a)$ 553
 d'un vecteur gaussien 557
 d'une loi géométrique 547
 d'une loi normale 554
 d'une loi de Poisson 548
 Singe 4, 119
 Singulière
 fonction — 323, 713
 partie — 323, 713
 Skorokhod (th. de représentation de —) .. 436
 Slutsky (théorème de —) **428**, 497
 Smirnov (test de Kolmogorov- —) 458
 SMOLUCHOWSKI Marian 664
 Sommable (famille —) 708
 Somme de deux variables
 à valeurs dans $\mathbb{Z}$ 180
 binomiales 187
 à densité 269
 à densité indépendantes 273
 discrètes indépendantes 186
 exponentielles 287
 normales 274
 de Poisson 187
 Sondage 51, 499
 Sous-additivité 87, 99
 dénombrable 89
 Sous-martingale 518

- Sous-tribu. 81
 Spectral (théorème —) 730
 Stabilité
 de la loi binomiale. 187
 de la loi normale. 274
 de la loi de Poisson. 187
 Stationnaire
 accroissements — s. 639
 chaîne de Markov — 586
 Statistique d'ordre. 365
 Steinhaus (théorème de —) 533
 Stieltjes (intégrale de —) 327
 Stirling
 formule de — 705
 preuve probabiliste. 531
 nombres de — 165, **727**
 Stochastique (matrice). 586, 589, 730
 Stratégie
 pour gagner un trésor. 698
 pour gagner à *pile-face*. 376
 Succès 135
 loi du premier — 136
 Suite
 de Cauchy. 704
 équidistribuée. 431
 de Rademacher. 211
 uniformément distribuée. 431
 sup. 81
 Sur-martingale. 518
 Symétrique
 matrice — (définie) positive. 730
 variable aléatoire — 237, 255
 événement — 448
 Système
 complet d'événements. 91
 induit par X. 130
 quasi-complet d'événements. 91
 total. 724
- T**
- Tchebychev (inégalité de —) ... 161, 261, **353**
 d'ordre k 353
 Temps
 d'arrêt. **376**, 601
 d'attente
 au feu tricolore. 322, 381
 au rendez-vous. 287
 de retour. 601
 moyen. 603
 Test
 fonction-test. 725
 de Kolmogorov-Smirnov. 458
 de primalité. 574
 Théorème
 de Bayes. 106, 107
 version continue. 281
 de Bernstein. 536
 de Carathéodory. 97, **743**
 central limit. **472**, 477
 de Chapman-Kolmogorov. 591, 650
 de Cochran. 405
 de comparaison de séries positives. 706
 de continuité
 (fonctions caractéristiques). 388, **427**
 (fonctions génératrices). 425
 de convergence dominée. 342
 de convergence dominée discret. 168, 710
 de convergence monotone. 341
 (démonstration). 355
 de convolution. 273, **375**
 de de Moivre-Laplace. 483
 de décomposition de Lebesgue. 324, 714
 de Dini. 718
 de Dirichlet. 707
 d'Erdős-Kac. 615
 ergodique. 599, 731
 d'extension de Kolmogorov. 750
 de Fubini
 cas général. 361, 721
 pour les séries doubles. 708, 709, 732
 de Glivenko-Cantelli. 457
 de Heine. 710
 d'intégration terme à terme. ... 154, **342**
 de Khintchine. 453
 de Kolmogorov. 750
 de König-Huygens. 157, 256, **340**
 de Lévy. 388, **427**
 limite central. **472**, 477
 de Miller. 575
 de Perron-Frobenius. 599, 731
 des probabilités composées. ... [H48], 105
 de Radon-Nikodým. 743
 de réalisation. 747
 de récupération des moments. 165
 de récurrence de Pólya. 661
 de Riesz-Fisher. 349
 du scrutin. 299
 de représentation de Skorokhod. 436
 de Slutsky. **428**, 497
 de sommation par paquets. 710
 spectral. 730
 de Steinhaus. 533
 de transfert. **344**
 pour un couple discret. 180
 pour un couple à densité. 271
 pour une variable discrète. 155
 pour une variable à densité. 254, 346
 de Weierstrass. 535, 719
 de Wick. 404
- Total
 formule de l'espérance — e. 194
 formule des probabilités — es. . [H47], 105
 système — 724
 Tour (*tower property*) 509
 Tout ou rien
 loi du — de Borel. 119
 loi du — de Kolmogorov. 447
 Tout ou rien (loi du — de Kolmogorov) .. 448
 Transfert (théorème de —) **344**
 pour un couple discret. 180
 pour un couple à densité. 271
 pour une variable discrète. 155
 pour une variable à densité. ... 254, 346
 Transformée
 de Fourier
 d'une variable aléatoire. 298
 de Laplace d'une v.a. 299
 Transient
 (mouvement brownien). 661
 état — 601
 événement — 215
 Transitif
 dés non — s. 698
 jeu non — 697
 Transition (matrice, probabilité de —) ... 586
 Transitoire
 classe — e. 601
 état — 601
 événement. 215
 Tri (méthode de — rapide randomisé) ... 579
 Triangulaire (inégalité —) 706
 Tribu
 asymptotique. 445
 complète. 90
 discrète. 81
 engendrée. 83

engendrée par une v.a. 367, 737
engendrée par plusieurs v.a. 446
grossière 81
de Lebesgue 90
produit 358, 735
de queue 445
sans atomes 99
séparable 90
sous- — 81
sur $\mathbb{C}$ 383
triviale 81
Trois *face* d'affilée 51
Tronquée (variable —) 322

U

$\mathcal{U}([a; b])$ 237
 $\mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$ 135
Uniforme
convergence — 718
loi — discrète 135
loi — à densité 237
Uniformément
continue (fonction —) 710
distribuées (suites —) 431
Univers [n34], **84**
— -image 129
Urnes d'Ehrenfest 608

V

Valeur moyenne (règles de la —) 604, 605
Vandermonde (formule de —) 142, 727
Variable aléatoire [n58], 317
absolument continue 232
centrée 159, 260
complexe 337, **383**
continue 232
—s décorrélées 188
à densité [n64], 232
espérance [n74], **253**
déterministe **33**, 378
discrète [n63], **129**
espérance [n73], **145**
espérance
définition alternative 326, 327
expression alternative 153, 169, **362**
définition générale **337**
gaussienne 392
—s indépendantes 367
intégrable **337**
cas discret 149
cas positif 335
cas à densité 253
mixte 322
réduite 159, 260
simple 129, 328
espérance 334
symétrique 237, 255
tronquée 322
Variance **340**
d'une v.a. à densité 256
d'une v.a. discrète 156
Variation bornée (fonction à —) 711
Vecteur
aléatoire 357
gaussien 400
simulation 557
Version
de l'espérance conditionnelle 506
de la probabilité conditionnelle 522, 523
Vieillessement (propriété de non —) 138, 238
Vitali (contre-exemple de —) 97
Voisinage 729
von Mises (paradoxe des anniversaires) 50

Vraisemblance (maximum de —) 679

W

Wald (identités de —) 197, 377
Watson (processus de Galton- —) 199
Weierstrass (théorème de —) 535, 719
Weyl (critère de —) 432
Wick (théorème de —) 404
WIENER Norbert 657
Wiener (mesure de —) 657

Z

Zéro-un
loi du — de Borel 119
loi du — de Kolmogorov 447
Zeta (fonction — de Riemann) 541, 620